

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II

spécialité: Mécanique des Fluides

par

Mikhail KHENNER

Stabilité des écoulements vibratoires dans une couche liquide continûment stratifiée, et dans un système de deux couches immiscibles, de densités différentes

Thèse soutenue le ... devant la commission d'examen:

Mme T.P. Lyubimova Examineurs

MM. H. Ben Hadid

Ch. Kharif

D.V. Lyubimov

B. Roux

M. Wadih

Mme T.P. Lyubimova Rapporteurs

MM H. Ben Hadid

R.L. Sani

Travail effectué à l'Institut de Recherche sur les Problèmes Hors Équilibre

Université d'Aix-Marseille II, UMR-6594 du CNRS

SOMMAIRE

1	INTRODUCTION GENERALE	11
1.1	Problème de stabilité de l'écoulement d'un liquide stratifié soumis à un champ vibratoire	11
1.2	Panorama de la bibliographie	13
1.2.1	Écoulements bicouches, stabilité de l'interface et des ondes	14
1.2.2	Écoulements de liquides continûment stratifiés et leur stabilité vibratoire	19
1.3	But et bref contenu du présent travail	20
2	STABILITÉ LINÉAIRE DE L'ÉCOULEMENT PLAN D'UN LIQUIDE STRATIFIÉ, INDUIT PAR LES VIBRATIONS	23
2.1	Position générale du problème	23
2.2	Cas asymptotique, en l'absence de diffusion moléculaire	25
2.2.1	Modèle de fluide parfait. Fréquences finies des vibrations	25
2.2.2	Approximation "haute fréquence"	30
2.3	Formulation complète pour un mélange: avec dissipation	31
2.4	Conclusion	46
3	STABILITÉ DE L'INTERFACE ENTRE DEUX LIQUIDES IMMISCIBLES SOUMIS À UN CHAMP DE VIBRATIONS TANGENTIELLES	47
3.1	Position du problème	47
3.2	Approximation de fluide parfait	49
3.2.1	Écoulement principal et problème de stabilité linéaire	50
3.2.2	Réduction à l'équation de Mathieu	51
3.2.3	Amortissement visqueux (modèle phénoménologique)	52
3.3	Formulation complète: problème linéaire de la stabilité pour les liquides visqueux	55
3.3.1	Écoulement principal et stabilité	57

3.3.2	Résultats des calculs numériques	59
3.4	Analyse faiblement non-linéaire de l'instabilité des ondes longues dans le cadre de l'approximation des hautes fréquences	60
3.5	Conclusion	69
4	PROBLÈMES AUX LIMITES ET À CONDITIONS INITIALES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES	71
4.1	Méthode de réduction du problème aux limites au problème de Cauchy .	71
4.2	Procédure de résolution numérique du problème spectral aux limites sur un ordinateur aux processeurs parallèles	75
5	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	81

RESUMÉ

On a étudié la stabilité des écoulements fermés 2D, stratifiés en densité, soumis à un champ vibratoire polarisé linéairement, avec l'axe des vibrations dirigé normalement au gradient de densité. Plusieurs types d'instabilités vibratoires ont été observés: dans un système liquide continûment stratifié et dans un système bicouche de liquides immiscibles.

Dans le cas d'un liquide continûment stratifié, on présente l'analyse des problèmes de stabilité linéaire dans les limites: **(a)** du modèle de fluide parfait (dans le cas de fréquences finies), et **(b)** de l'approximation des vibrations à haute fréquence. Enfin **(c)**, le problème de la stabilité linéaire est examiné en formulation complète, c.à-d. qu'on examine les effets liés à l'insertion des mécanismes dissipatifs: la diffusion moléculaire et la viscosité (dans le cas des hautes fréquences).

Dans le cas du système bicouche de liquides immiscibles, on présente l'analyse des problèmes de stabilité linéaire dans les limites: **(a)** du modèle de fluide parfait (fréquences finies), **(b)** du modèle phénoménologique "visqueux" (fréquences finies). On a étudié aussi **(c)** l'instabilité faiblement non-linéaire pour des ondes longues (hautes fréquences) et enfin, **(d)** le problème de la stabilité linéaire en formulation complète, c.à-d. pour les liquides visqueux soumis à un champ de vibrations à fréquence finie.

Les problèmes de stabilité formulés ci-dessus ont été analysés par voies théorique et numérique, en utilisant une série de méthodes théoriques et pratiques de stabilité hydrodynamique. On propose aussi un algorithme numérique efficace pour la solution des problèmes linéaires spectraux sur les ordinateurs puissants à processeurs parallèles.

Mots clés: Systèmes 2D de fluides hétérogènes, Stratification en densité, Diffusion, Vibrations, Instabilité linéaire, Instabilité de l'interface, Résonance paramétrique, Simulation numérique, Algorithme parallèle.

NOTATIONS PRINCIPALES

a	amplitude des vibrations
A	$= a/h$ amplitude adimensionnelle des vibrations
b	$= a\omega$ amplitude de la vitesse des vibrations
B	amplitude adimensionnelle de la vitesse des vibrations (Chap.1)
B	$= a^2\omega^2 h^2 / (\nu D)$ paramètre vibratoire (§2.3)
B	$= 0.25a^2\omega^2 ((\rho_1 - \rho_2) / (g\alpha))^{1/2}$ paramètre vibratoire (§3.4)
B_v	$= 0.25a^2\omega^2 ((\rho_1 - \rho_2) / (g\alpha))^{1/2} = 0.25\epsilon^2 We$ paramètre vibratoire (§3.2.2)
$C(\vec{r}, t)$	concentration du constituant léger du mélange (Chap.2)
D	coefficient de diffusion (Chap. 2)
D	déterminant du système des équations algébriques linéaires homogènes (§3.2.3, §3.3 et Chap.4)
g	accélération de la chute libre
G_o	$= g / (h\omega^2)$ (Chap.2 et §3.3)
G_d	$= Ga P_d = gh^3 / (\nu D)$ (§2.3)
Ga	$= gh^3 / \nu^2$ nombre de Galilée (§2.3)
h	épaisseur de la couche
H	demi-épaisseur adimensionnelle de la couche
H_1	$= h_1 / L, H_2 = h_2 / L$ épaisseurs adimensionnelles du système bicouche
\vec{j}	vecteur unitaire le long de l'axe x
\vec{k}	vecteur d'onde
L	taille caractéristique hydrodynamique
L	$= (\alpha / (g (\rho_1 - \rho_2)))^{1/2}$ constante capillaire (§3.2)
m	masse de la substance diluée (Chap.2)
M	$= A^2 / G_o \equiv a^2\omega^2 / (gh)$ (§2.2.2)
\vec{n}	vecteur unitaire de la normale à l'interface
p	pression
p, q	paramètres de l'équation de type Mathieu (Chap.1)
P_d	$= \nu / D$ nombre de Prandtl diffusif (§2.3)
\vec{q}	flux diffusif (§2.3)
Q, A	paramètres de l'équation de type Mathieu pour Y (§3.2)
r	paramètre super(sous)critique (§3.4)
r_0	paramètre de stratification (§2.2)
\hat{r}_0	différence des densités (§2.3)
R	paramètre supercritique
R, W	variables de Lagrange (§2.2.1)

S	$= \frac{d}{dz} \ln \rho_0$ (Chap.2)
S	$= \ln \rho$ (§2.3)
S	$= T_1/T_m$ efficacité de l'algorithme parallèle (Chap.4)
t	temps
T	période des vibrations
T_1	temps d'exécution du programme sur un processeur (Chap.4)
T_m	temps d'exécution du programme sur m processeurs (Chap.4)
\vec{u}	$= (u, 0, w)$ champ des perturbations de la vitesse
\vec{w}	$= (w, 0, q)$ perturbations de l'état quasi-stationnaire (§2.2.2)
\vec{U}	vitesse moyenne (Chap.2)
\vec{u}	$= (u, 0, w)$ perturbations de l'état de base (Chap.3)
\vec{w}	$= (w, 0, q)$ perturbations de l'état de base (Chap.3)
\vec{V}, U	vitesse des couches de l'état de base (§3.2)
\vec{v}	vitesse
\vec{V}	vitesse (Chap.2)
\vec{V}	amplitude de la vitesse pulsatoire (§2.2.2)
$U(\xi)$	énergie potentielle de la déformation de l'interface (§3.4)
V	volume (§2.3)
We	$= \omega^2 L/g$ nombre de Weber (§3.2)
We	$= \rho_2 h^3 \omega^2 / \alpha$ nombre de Weber (§3.3)
x, z	axes des coordonnées
$Y(t)$	$= \xi(t) \exp(-i\Phi(t))$, où $\Phi(t)$ est une fonction périodique (§3.2)
z	$= \xi(x, y, t)$ équation de l'interface
$[x]$	saut de la grandeur x à l'interface

Lettres grecques

α	coefficient de la tension superficielle (interfaciale)
δ	épaisseur des couches limites visqueuses
δ_{jl}	symbole de Kroneker (Chap.4)
$\epsilon = a/L$	amplitude adimensionnelle des vibrations (§3.1)
ϵ	petit paramètre (§3.2)
ϵ	petit paramètre (§3.4)
η	viscosité dynamique
ϕ	angle entre les vecteurs \vec{j}, \vec{k} (§3.2.2)
γ	coefficient de frottement linéaire (Chap. 1)
$\vec{\gamma}$	vecteur unitaire le long de l'axe z
λ	décroissement des perturbations
λ	décroissement propre d'amortissement des petites oscillations visqueuses (§3.2.3)
μ	$= -ln \hat{r}_0$ (§2.3)
ν	viscosité cinématique
ν	$= \nu_1/\nu_2$ rapport des viscosités (§3.2.3)
ω	fréquence des vibrations
Ω_β	$= h^2\omega/\nu_\beta$ fréquences adimensionnelles des vibrations (§3.3)
ψ	fonction de courant pour des perturbations 2D (§2.3)
Ψ, Φ	fonctions de courant pour des perturbations 2D (§3.4)
ρ	densité
ρ	rapport des densités (Chap.1)
ρ	$= \rho_1/\rho_2$ rapport des densités (§3.2)
ρ	$= \rho_2/\rho_1$ rapport des densités (§3.3)
ρ	$= \rho_1/\rho_2$ rapport des densités (§3.4)
σ	$= \nu_2^{1/2} (gL^3)^{-1/4}$ paramètre visqueux (§3.2.3)
τ	$= \omega t$ temps rapide (§2.3)
τ_d	temps diffusif caractéristique
τ_o	temps de l'observation

Indices supérieurs

- * valeurs des paramètres mis en relief
- ' différentiation selon z (Chap. 2)
- ' différentiation selon x (§3.4)
- . différentiation par rapport au temps
- \sim variable pulsatoire (§2.3)
- \tilde{y} fonction transformée (Chap.4)
- (i) numéro de la solution particulière (Chap.4)
- (j) numéro de la solution transformée (Chap.4)

Indices inférieurs

- * valeurs des paramètres mis en relief
- c valeurs des paramètres critiques
- crit* valeurs des paramètres critiques
- 0 variable de l'état de base (Chap. 2)
- 1 couche inférieure dans le système bicouche
- 2 couche supérieure dans le système bicouche
- β numéro des couches ($\beta = 1, 2$)
- n numéro du mode de Fourier
- n numéro des domaines d'instabilité paramétrique (§3.2)
- x, z différentiation selon la variable correspondante (§2.3)

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1 Problème de stabilité de l'écoulement d'un liquide stratifié soumis à un champ vibratoire

Par liquide stratifié, on comprend le liquide dont les caractéristiques physiques (la densité, la capacité thermique, la viscosité dynamique, etc.) de l'état de base stationnaire ou quasi-stationnaire changent seulement dans une certaine direction. Autrement dit, pour l'état de base les caractéristiques physiques du liquide sont fonctions d'une seule variable spatiale. Une stratification peut être provoquée par différentes raisons physiques; la raison la plus courante est la force de gravitation. Cette force crée une distribution de particules du liquide, de sels dissous et de suspensions, telle que l'inhomogénéité du liquide surgit le long de la direction du champ gravitationnel. Cet inhomogénéité s'appelle une stratification de densité. D'après les expériences, la stratification de densité exerce une influence plus importante sur les caractéristiques dynamiques du liquide et sur le processus de propagation des mouvements ondulatoires que les autres types de stratification. En conséquence, dans notre analyse des mouvements ondulatoires en liquide stratifié, tous les types de stratification sauf la stratification de densité seront négligés; et par "liquide stratifié", on comprendra le liquide stratifié en densité. Par la suite, nous utiliserons cette terminologie, généralement admise.

Si un système physique, composé d'un liquide visqueux, se trouve dans un champ et ne subit aucune influence extérieure, ce système tend vers l'état de repos, qui est caractérisé, en particulier, par une diminution linéaire de la densité du liquide à partir du fond du réservoir vers la surface; une stratification s'installe donc. Comme on le sait, si on soumet ce système à une influence extérieure, par exemple à des vibrations, l'état de l'équilibre mécanique, généralement parlant, devient instable. Dans cette Thèse, on examine le cas particulier, mais cependant important, de l'influence vibratoire sur un liquide. On considère une vibration polarisée linéairement le long de la direction normale par rapport au gradient de densité. Cette orientation excite directement un mouvement dans le liquide, donnant la possibilité d'une évolution très rapide d'instabilité.

Les vibrations induisent un certain écoulement (non stationnaire en général) qui possède une structure simple. C'est cet état qu'on va nommer l'état de base, ou l'état quasi-stationnaire (l'état de quasi-équilibre). Nous caractérisons l'influence extérieure sur le système par un paramètre R . L'état quasi-stationnaire devient instable à partir d'une certaine valeur R^* , cédant la place à certains mouvements réguliers. La régularité du mouvement se conserve jusqu'aux petites valeurs supercritiques du paramètre R . Pour les valeurs assez grandes de R , le mouvement devient très compliqué, irrégulier et chaotique; la turbulence se déclare alors.

Tous ces phénomènes dépendent des dimensions et de la forme de la cavité qui contient le liquide stratifié, des propriétés du liquide et des autres facteurs.

Au fond, l'investigation de l'évolution du système à partir de l'état de quasi-équilibre mécanique vers le comportement chaotique est réduit à la description du processus suivant lequel, au fur et à mesure de l'accroissement du paramètre de commande, certaines solutions perdent la stabilité et passent à d'autres solutions. Dans ce but, on utilise habituellement les trois principales méthodes d'analyse: linéaire, faiblement non-linéaire (locale) et fortement non-linéaire (globale).

Dans le cadre de la théorie linéaire, les valeurs critiques du paramètre de commande qui provoquent le changement de la stabilité de la solution étudiée peuvent être établies sur la base de l'analyse des équations linéarisées pour les perturbations de l'état de base stationnaire ou quasi-stationnaire. Avec cela, on considère seulement les perturbations infinitésimales, pour lesquelles les équations linéarisées sont applicables. Les critères de la théorie linéaire peuvent donner seulement la condition suffisante pour la perte de la stabilité, parce que l'écoulement qui est stable d'après la théorie linéaire peut en réalité être instable par rapport aux perturbations de valeur finie.

L'étape suivante de l'étude des caractéristiques de la stabilité des différents états du système est l'analyse faiblement non-linéaire ou locale. L'essence de l'analyse faiblement non-linéaire consiste à développer en série les solutions, le paramètre et l'opérateur différentiel, à proximité du point de bifurcation (trouvé comme résultat de l'analyse linéaire); il s'agit d'un développement en série par rapport au petit paramètre (au sens du paramètre supercritique), à l'amplitude de la solution, etc. La méthode et son résultat sont locaux, parce qu'ils sont limités par les petites amplitudes et donnent l'information sur le branchement des solutions seulement près du point de la bifurcation examinée.

Enfin, l'information complète sur la stabilité globale de cette solution ou de l'autre, peut être obtenue dans le cadre de la théorie fortement non-linéaire, où les équations complètes non-stationnaires nonlinéaires sont examinées. En général, les calculs des mouvements convectifs développés exigent l'utilisation de méthodes numériques. Les moyens de résolution des équations aux dérivées partielles peuvent être assez différents. L'un des plus utilisés est la méthode aux différences finies, qui permet

de réduire le système des équations aux dérivées partielles à un système d'équations algébriques. Pour la solution de ce dernier, il existe des méthodes numériques très efficaces.

Le but de ce travail est l'étude à l'aide des méthodes indiquées ci-dessus de l'instabilité vibratoire du quasi-équilibre et des mouvements supercritiques dans les cas suivants:

- le liquide est continûment stratifié;
- il y a deux couches immiscibles, avec des caractéristiques physiques différentes.

Il faut remarquer que le deuxième cas ne peut pas s'obtenir à partir du premier par la simple transition limite de la distribution continue vers la distribution discontinue de la densité, puisque l'apparition de l'interface entre les couches liquides entraîne la nécessité de prendre en considération les effets liés à la tension interfaciale.

Ces dernières années, avec le développement impétueux des techniques électroniques de calcul et la création d'ordinateurs puissants à base de "clusters" de processeurs, capables d'accomplir des calculs importants de manière plus efficace qu'un ordinateur monoprocesseur (même assez puissant), il y avait une possibilité d'expériences numériques dans la classe des problèmes complexes de la théorie de la stabilité hydrodynamique. La création d'un algorithme numérique parallèle a ses particularités spécifiques. Les experts s'accordent à penser que le futur de l'hydrodynamique calculatoire appartient aux calculs parallèles et c'est pourquoi la théorie et la pratique des calculs parallèles sont cultivées activement dans de nombreux Centres de Calcul dans le monde. Ces espoirs sont basés sur le fait que la plupart des modèles physiques contiennent un parallélisme interne et c'est pour cela que l'algorithmique parallèle de leur calcul semble le plus naturel. Au Chapitre 4 de cette Thèse, on expose la procédure de réalisation d'une des méthodes de résolution des problèmes aux limites spectraux (la méthode de la réduction au problème de Cauchy) sur un ordinateur multiprocesseurs du type "mémoire distribuée (DMM)". Actuellement, les ordinateurs de ce type se répandent largement à cause de leur architecture assez simple et bon marché, et de leur flexibilité et facilité d'adaptation aux besoins de l'utilisateur concret.

Dans le paragraphe suivant, on donne la panorama des travaux ayant un rapport direct avec le sujet de la Thèse.

1.2 Panorama de la bibliographie

A présent, on constate un accroissement de l'intérêt pour l'étude de la dynamique des mouvements ondulatoires de liquides hétérogènes divers et, en particulier, des liquides stratifiés qui interviennent dans un grand nombre de domaines (géophysique, océanologie, physique de l'atmosphère, utilisation technique des liquides cryogéniques), ainsi que pour les problèmes de protection et d'étude de l'environnement, etc. Cet intérêt est conditionné non seulement par les besoins pratiques, mais aussi

par un grand contenu théorique des problèmes qui se présentent.

Certes, pour la description détaillée d'un grand nombre des phénomènes physiques, liés à la dynamique des liquides stratifiés, il est nécessaire de se baser sur les modèles non-linéaires assez développés, pour l'étude complète desquels seules sont applicables les méthodes numériques basées sur l'utilisation des ordinateurs modernes. Cependant dans certains cas, on peut avoir une idée qualitative sur l'ensemble des phénomènes étudiés, en se basant sur des modèles linéaires plus simples et les méthodes analytiques ou semi-analytiques de résolution. De ce point de vue, les problèmes de la dynamique des liquides stratifiés sont très caractéristiques. Même dans le cadre des modèles linéaires, leurs formulations mathématiques sont très originales et amènent vers les problèmes aux limites non-standard. Cela définit, en plus de conséquences physiques non triviales, un intérêt mathématique indépendant pour ces problèmes [33, 34].

Les écoulements de liquide stratifié peuvent être divisés en 2 classes: les écoulements des liquides bicouches (dans le cas général - des liquides multicouches) et les écoulements de liquides continûment stratifiés. Pour les écoulements de la première classe, des méthodes analytiques sont applicables. A titre d'exemple, on peut citer le problème examiné au Chapitre 3.

1.2.1 Ecoulements bicouches, stabilité de l'interface et des ondes

Les systèmes liquides bi et multicouches sont utilisés dans plusieurs processus physiques et technologiques. A titre d'exemple on peut citer, une couche liquide intermédiaire facilitant l'écoulement du pétrole dans une tuyauterie, ou plusieurs films liquides superposés, l'un sur l'autre, pour la fabrication de la pellicule photo. L'instabilité de l'interface peut influencer sérieusement ces processus et provoquer, par exemple, la réduction de la différence de pression (perte de charge) dans la tuyauterie ou la mauvaise qualité de la pellicule.

Dans la plupart des travaux se rapportant à cette classe, on étudie les divers types de mouvements ondulatoires à l'interface entre deux couches immiscibles du liquide avec des caractéristiques physiques différentes. En général, on suppose que les liquides se trouvent dans une couche plane horizontale infinie (c.à-d. dans une couche dont l'étendue dans les directions horizontales est beaucoup plus grande que son épaisseur), avec les frontières horizontales rigides ou libres (ou la frontière inférieure rigide, mais la supérieure libre; ou les deux libres). Ces hypothèses permettent de ne pas prendre en considération l'interaction du liquide avec les frontières verticales de la couche, ce qui simplifie l'analyse, essentiellement. Parfois, pour une plus grande simplification du problème, on fait des hypothèses sur l'épaisseur relative des couches liquides. Par exemple, on considère que la couche inférieure est beaucoup plus épaisse que la couche supérieure, ou que les deux couches sont d'épaisseur infinie (cas limite).

Le mouvement relatif des couches, entraînant la déformation de l'interface, peut être provoqué

par la présence d'un gradient de pression dans la direction horizontale (écoulement bicouche de Poiseuille), ou par un mécanisme de déplacement, par exemple par le mouvement dans le plan horizontal d'une des frontières rigides de la couche (écoulement de Couette), ou par la combinaison des deux mécanismes (écoulement de Couette - Poiseuille). La déformation de l'interface plane amène la formation de structures tourbillonnaires, nommées ondes de Kelvin - Helmholtz, qui se déplacent à une vitesse qui est approximativement la moyenne entre les vitesses des deux écoulements (voir la panorama des travaux, consacrée à l'instabilité de Kelvin - Helmholtz, en [8]). Si les densités des liquides sont différentes, il peut exister (en supplément) une paire d'ondes progressives instables, ou modes de Holmboe, de même direction mais de signe opposé dans le système de référence, se déplaçant à la vitesse moyenne entre les écoulements [20]. Si les viscosités des liquides sont différentes, l'interface initialement plane peut devenir instable [26], ce qui se passe, par exemple, dans le cas d'un liquide plus visqueux qui occupe la couche plus fine. En même temps, la configuration inverse peut être linéairement stable par rapport aux perturbations aux ondes longues. La tension interfaciale influence peu les perturbations aux ondes longues, à la différence des perturbations aux ondes courtes [9], sur lesquelles il exerce une influence stabilisante [2]. Les perturbations des ondes de longueurs arbitraires sont étudiées en [22]. On remarque aussi, que négliger la tension interfaciale dans l'analyse peut entraîner l'apparition spontanée de parties de l'interface ayant un petit rayon de courbure (points singuliers) [21].

Les vibrations de la cavité influencent essentiellement l'écoulement du liquide hétérogène. En effet, dans ce cas, dans le système de référence lié à la cavité, un champ inertiel hétérogène apparaît dans le liquide. Sur fond de courant stationnaire, l'insertion du mouvement vibratoire peut accroître ou diminuer la stabilité. En [27], on étudie la stabilité du liquide visqueux dans le cas d'une surface plane soumise à des mouvements harmoniques dans le plan. La surface de la couche liquide peut être librement déformée. Il est montré que les vibrations induisent l'instabilité des ondes longues, et lors de l'augmentation de la fréquence des vibrations, le seuil d'amplitude de l'instabilité augmente. Des perturbations de longueurs d'ondes arbitraires sont étudiées numériquement en [16], où une instabilité des ondes courtes, avec un seuil fini (dépendant de la fréquence des vibrations), a été découverte. En [6], on examine le problème de la stabilité de l'écoulement d'un liquide bicouche entre des plaques parallèles rigides, lorsque l'une d'elle oscille longitudinalement. Les auteurs ont obtenu l'expression explicite pour le décrétement des perturbations; l'égalité à zéro de ce dernier signifie que les perturbations sont neutres (ne s'accroissent pas et ne s'évanouissent pas avec le temps), la positivité signifie que les perturbations s'accroissent, et la négativité signifie que les perturbations s'évanouissent et que l'écoulement stationnaire de Couette est stable. Cela montre que les vibrations de la plaque supérieure peuvent donner l'influence stabilisante ou déstabilisante pour les perturbations des ondes longues. On obtient les résultats indiquant qu'une interface instable peut être entièrement stabilisée par les vibrations. En [23], Renardy examine une version compliquée de

ce problème; notamment, il ajoute un gradient de pression longitudinal, comprenant une composante stationnaire et une composante oscillatoire dans le temps, et le déphasage avec les oscillations de la plaque supérieure. Dans ce problème, malheureusement, il y avait trop de paramètres indépendants (11), pour faire des conclusions définitives sur la stabilité.

On a étudié également d'une manière intense l'influence des vibrations verticales (ou, ce qui est le même, le champ gravitationnel variable) sur la stabilité de l'interface horizontale ou surface libre [25, 32, 51, 15]. Le trait caractéristique du problème indiqué est l'influence double du champ variable extérieur sur la stabilité. D'une part, le forçage extérieur variable peut supprimer les perturbations monotones amenant, en l'absence du champ extérieur, le développement de l'instabilité (suppression de l'instabilité de Rayleigh - Taylor). D'autre part, le champ variable extérieur peut intensifier les perturbations qui s'évanouiraient en son absence (excitation paramétrique de la ride de Faraday). Ainsi, pour la suppression des instabilités hydrodynamiques les paramètres du champ extérieur doivent être tels que le champ supprime les perturbations monotones et n'amène pas le développement d'oscillations résonnantes [32, 51]. En négligeant la dissipation visqueuse, on peut montrer que les équations pour de petites perturbations de l'interface plane sont réduites à l'équation de type Mathieu:

$$\ddot{\xi} + (p - q \cos \omega t) \xi = 0, \quad (1.1)$$

où p et q représentent certains paramètres. Parce que nous sommes intéressés par la possibilité de stabilisation de l'état absolument instable en l'absence des modulations, nous croyons que, dans le spectre des valeurs du paramètre p , au moins $p_{min} < 0$. Soit une fréquence de modulation beaucoup plus grande que l'inverse du temp caractéristique de développement de la perturbation la plus dangereuse ($\omega^2 \gg |p_{min}|$), alors on peut montrer [32] que pour obtenir la stabilité, il est nécessaire de satisfaire la condition suivante:

$$q^2 \geq -2\omega^2 p_{min}. \quad (1.2)$$

Dans les problèmes de stabilité hydrodynamique, on rencontre deux situations qualitativement différentes décrites par l'équation (1.1). Si pour des paramètres constants, à part les perturbations monotones croissantes, existent des perturbations vibratoires amorties, la modulation peut amener à un nouveau type d'instabilité (qui a lieu, en outre, à $q = 0$) - à la résonance à haute fréquence paramétrique. En considérant l'amplitude de la modulation assez petite ($q \ll p$), on peut obtenir la condition suivante de stabilité par rapport à l'excitation paramétrique [32]:

$$q^2 \leq 4p - \omega^2. \quad (1.3)$$

Ainsi, dans ce cas, la stabilisation complète est atteinte pour une gamme des amplitudes de la modulation assez grandes pour prévenir l'instabilité monotone initiale (condition (1.2)), mais en

même temps assez petites pour ne pas provoquer une résonance paramétrique (condition (1.3)). Le cas le plus simple est le celui où seuls les mouvements monotones apparaissent dans le spectre des mouvements propres. Alors, au moins pour les petites amplitudes de la modulation, l'excitation paramétrique est impossible, et pour la stabilisation il suffit de satisfaire la condition (1.2).

L'insertion de la dissipation visqueuse accroît ordinairement le seuil de stabilité par rapport à l'excitation paramétrique. Dans le cas de faibles effets de dissipation, on incorpore à l'équation de Mathieu un terme linéaire décrivant le frottement:

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + (p - q \cos \omega t)\xi = 0. \quad (1.4)$$

En [15], on fait la comparaison des résultats obtenus en utilisant l'équation modèle (1.4) et les résultats obtenus numériquement lors des calculs des équations visqueuses de Navier - Stokes. Par rapport au seuil de la stabilité, obtenu par l'analyse des équations de Navier - Stokes, le seuil de stabilité résultant de l'analyse de l'équation modèle se trouve déplacé vers le domaine des plus petits nombres d'onde et des grandes valeurs de l'amplitude des vibrations.

Le mouvement du liquide hétérogène soumis à un champ à haute fréquence peut être décomposé en composantes moyenne et pulsatoire. A l'aide de la méthode de la "moyenne" on peut obtenir le système fermé des équations et des conditions aux limites. En [43], dans le cadre d'une telle approximation, on examine le problème de la forme de la surface libre du liquide soumis à un champ gravitationnel modulé; en [44, 37], on étudie la stabilité linéaire et non linéaire de l'interface plane entre deux couches horizontales du liquide avec des densités comparables, soumises à un champ de vibrations tangentielles.

Expérimentalement, on a trouvé [25, 28] que les vibrations horizontales de la cavité entraînent la formation d'un relief immobile d'onde sur l'interface. En [44], il est montré que

- les états quasi-stationnaires sont possibles, où le mouvement est absent en moyenne, mais l'interface fait de petites oscillations par rapport au relief immobile (de l'ordre de l'amplitude du déplacement de la cavité);
- lorsqu'on atteint l'amplitude critique de la vitesse des vibrations, l'interface plane devient instable, et est remplacée par le relief immobile d'onde;
- dans le cas où le liquide lourd se trouve par dessus, on trouve toujours des perturbations conduisant à la perte de stabilité. Ainsi, dans ce cas, l'interface plane est instable absolument, c.à-d. les vibrations horizontales n'empêchent pas le développement de l'instabilité de Rayleigh - Taylor, à la différence des vibrations verticales, qui sous certaines conditions suppriment son développement;

- le relief d'onde (dans le cas où le liquide lourd se trouve en bas) est possible seulement pour l'interface entre des liquides de densité comparable, mais pas pour le cas d'une surface libre. Cette circonstance se retrouve aussi dans les travaux expérimentaux [25, 28];
- le relief avec longueur d'onde finie n'est pas possible pour n'importe quelle épaisseur des liquides; il se présente seulement pour les couches assez épaisses, telles que $h > [3\alpha/(\rho_1 - \rho_2)g]^{1/2}$, où α est le coefficient de la tension interfaciale, ρ_1 et ρ_2 sont les densités du liquide inférieur et supérieur, respectivement; g est l'accélération de la chute libre.
- A l'aide de la méthode du petit paramètre, on a trouvé les dépendances des caractéristiques quasi-stationnaires périodiques selon l'espace des formes de l'interface du paramètre supercritique, on a défini les limites des domaines de l'excitation supercritique et souscritique du relief.

En [47], on propose la méthode de calcul numérique du problème donné, fondé sur la présentation du liquide bicouche comme un milieu continu avec les paramètres dépendant de la concentration de l'additif marqueur; avec cela l'interface est remplacée par une couche de transition, avec les paramètres variant brutalement. Comme marqueur, on utilisait la valeur de la densité du milieu. Sur la Fig. 1.1-3, on montre les résultats des calculs du problème pris en [47]. Sur la Fig. 1.1, sont représentés les formes quasi-stationnaires de l'interface des liquides pour un rapport de densités $\rho = 1.25$ (le liquide le plus dense se trouvant en bas), pour un demi-épaisseur de la couche $H = 6$ et pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle de la vitesse des vibrations $B = 11.0, 12.0$ et 12.5 . Avec l'accroissement ultérieur du paramètre vibratoire, comme pour les expériences [25, 28], on observe le doublement de la période spatiale du relief d'onde. Les stades successifs de la formation de la structure avec la période doublée pour $B = 13, H = 6, \rho = 1.25$ sont présentées sur la Fig. 1.2. Aux grandes valeurs du paramètre supercritique, comme le prouvent les calculs, le développement des perturbations amène la formation de "strates". La couche se divise horizontalement en zones alternées, remplies de liquides différents, avec les interfaces de plus en plus verticales (Fig. 1.3).

Dans tous ces travaux on a examiné le cas de la polarisation linéaire du champ vibratoire. Les travaux [45, 46] sont consacrés au cas plus général, où on déduit les équations et les conditions aux limites de l'écoulement du liquide continûment stratifié [45] et du liquide bicouche [46], avec une loi arbitraire du mouvement progressif de la cavité.

Le problème des mouvements ondulatoires à l'interface de milieux liquides non visqueux d'épaisseur finie est examiné, en général, en [4, 5]. En [4], dans le cadre de l'analyse faiblement non-linéaire, sont étudiées les bifurcations de tous les types d'ondes 2D: ondes progressives, ondes verticales et ondes mixtes (l'onde mixte est une superposition des ondes d'amplitudes différentes se déplaçant à droite et à gauche). La stabilité de tous les types d'ondes par rapport à la modulation est étudiée

en détail. Dans le cas de modulations tangentielles, les seuils de stabilité des ondes progressives et stationnaires coïncident; si à côté des tangentielles il y a aussi des modulations transversales, les ondes stationnaires sont moins stables que les ondes progressives. L'augmentation du rapport des densités en général exerce une influence stabilisante sur les ondes progressives, mais une influence déstabilisante sur les ondes stationnaires. On peut dire la même chose de la tension interfaciale. En [3], on obtient les équations générales d'évolution pour les ondes 2D faiblement non-linéaires à l'interface de deux milieux liquides. L'épaisseur de la couche liquide supérieure est supposée petite par comparaison à la longueur caractéristique de l'onde, alors que pour l'épaisseur de la couche inférieure aucune restriction n'est imposée. On examine les différents types de frontières. La plupart des modèles connus non linéaires, par exemple l'équation de Korteweg - de Vries [1] pour les ondes en eau peu profonde, décrivant (entre autres) des solutions solitaires (solitons), se trouvent à partir des équations générales obtenues comme cas particuliers.

1.2.2 Écoulements de liquides continûment stratifiés et leur stabilité vibratoire

Les écoulements d'un liquide continûment stratifié n'ont pu être étudiés, dans la plupart des cas, que par voie numérique, en utilisant l'élaboration plus récente de méthodes aux différences finies, spectrales, éléments finis, etc. Un bon aperçu des méthodes de résolution numérique des problèmes de la dynamique d'un liquide stratifié se trouve en [29, 30].

L'influence des vibrations sur un liquide faiblement stratifié (à la suite d'un chauffage hétérogène) est étudiée assez en détail en [35] (convection vibrationnelle). Au contraire, la stabilité vibratoire d'un liquide fortement stratifié (avec une différence caractéristique des densités de 2 fois et plus) et l'influence possible de la diffusion, n'ont pas été étudiées en réalité, ce qui fait l'intérêt des problèmes analogues qui sont examinés au Chapitre 2 de la Thèse. Une autre circonstance, méritant l'attention, est liée au fait que la plupart des travaux sur la convection vibratoire concerne la situation où le gradient de la densité et les vibrations sont dirigés coaxialement [24]. Le cas de la force extérieure et du gradient orientés normalement est beaucoup plus complexe, puisque les termes oscillatoires convectifs dans les équations du mouvement compliquent la réalisation de l'analyse linéaire. Cette situation est examinée au Chapitre 2.

Il faut noter le travail [10] qui examine la stabilité de l'écoulement d'un liquide continûment stratifié soumis à un champ de vibrations orientées arbitrairement. En considérant le liquide illimité et en passant aux coordonnées de Lagrange, l'auteur réussit à réduire le problème aux dérivées partielles à un problème d'évolution avec un système d'équations différentielles ordinaires et à obtenir certaines conclusions sur la stabilité de l'écoulement pour divers cas limites.

1.3 But et bref contenu du présent travail

L'objet principal du présent travail est d'étudier la stabilité des écoulements 2D fermés d'un liquide stratifié soumis à un champ vibratoire, où l'axe des vibrations et le gradient de la densité sont orthogonaux. Nous nous intéressons à deux cas limites différents, c.à-d. on étudie **(a)** les caractéristiques de la stabilité d'un liquide continûment stratifié (selon une loi donnée), et **(b)** les caractéristiques de la stabilité d'un système bicouche, où les liquides sont immiscibles et incompressibles. Puisque nous devons nous heurter à différents problèmes aux limites et à conditions initiales, il y avait une nécessité d'élaborer un algorithme numérique efficace, parallèle, pour la résolution de ces problèmes physiques, dont la plupart ne peuvent être analysés que par voie numérique.

Dans ce but, nous présentons:

1. au Chapitre 2, l'étude de la stabilité de l'écoulement plan d'un liquide continûment stratifié (avec grande hétérogénéité de densités) soumis à un champ vibratoire, où l'axe des vibrations et le gradient de densité sont orthogonaux. Dans la première Partie (§2.1), on donne l'organisation du problème. Dans la Section 2.2, on formule les problèmes de la stabilité linéaire dans le cadre du modèle de fluide parfait (§2.2.1) et l'approximation des hautes fréquences des vibrations (§2.2.2). Ainsi, on éclaircit les domaines des valeurs des paramètres, pour lesquels les perturbations les plus dangereuses sont 2D. Dans la Section 2.3, le problème est examiné du point de vue du modèle complet, c.à-d. on examine les effets liés à l'insertion des mécanismes dissipatifs: la diffusion moléculaire et la viscosité.
2. au Chapitre 3, l'étude de la stabilité de l'interface plane entre deux liquides immiscibles avec les caractéristiques physiques différentes, soumis à un champ vibratoire tangentiel par rapport à l'interface (non perturbée). Ce problème est, dans un certain sens, le cas limite du problème résolu au Chapitre 2. Dans la Section 3.1, on donne l'organisation du problème. Dans la Section 3.2, on examine la stabilité linéaire (concernant les perturbations 2D) de l'interface entre fluides parfaits. Dans la Section 3.3, est formulé et résolu numériquement le problème de la stabilité linéaire pour le modèle complet, c'est-à-dire pour le cas de liquides visqueux incompressibles. Les fréquences des vibrations sont considérées comme finies. Dans la Section 3.4, on étudie le mode d'onde longue interfaciale de l'instabilité, par les méthodes de l'analyse faiblement non-linéaire, dans le cadre de l'approximation de hautes fréquences.
3. au Chapitre 4, l'étude détaillée des aspects numériques de la formulation des problèmes aux limites et à conditions initiales pour les équations différentielles ordinaires linéaires, comme dans les Chapitres deux et trois. On expose un algorithme efficace de résolution numérique du problème aux limites sur un ordinateur multi-processeurs, basé sur la méthode classique de réduction d'un problème aux limites à un problème à conditions initiales.

4. Enfin, une conclusion générale et les perspectives sont données au Chapitre 5 pour l'étude théorique et numérique des mouvements vibratoires pour les différents systèmes stratifiés.

Signalons qu'une partie des résultats présentés dans cette étude a fait l'objet de présentations à des congrès internationaux ((a) Meeting of the European Network "Dynamics of Multiphase Flows across Interfaces", Wavre, Belgium, 1997; (b) 4th International Conf. "Parallel Computing Technologies", Yaroslavl, Russia, 1997; (c) Second International School on Fluid Mechanics, Perm, Russia, 1997). Ils ont fait aussi l'objet de publications internationales [11, 12, 13] et russes [14, 38, 39].

C'est une place pour la figure f11-f13

CHAPITRE 2

STABILITÉ LINÉAIRE DE L'ÉCOULEMENT PLAN D'UN LIQUIDE STRATIFIÉ, INDUIT PAR LES VIBRATIONS

Dans ce Chapitre on étudie la stabilité de l'écoulement plan d'un liquide incompressible stratifié, remplissant la couche plane horizontale, faisant les oscillations harmoniques dans la direction horizontale. Ici, on réalise l'étude dans le cadre de l'approximation de hautes fréquences (§2.2.2 et §2.3), et de fréquences finies pour le cas limite de viscosité nulle (§2.2.1). La dissipation est négligée dans les problèmes formulés au §2.2. Dans la Section 2.3, les effets dissipatifs (c.-à-d., la diffusion moléculaire et la viscosité) sont pris en considération.

2.1 Position générale du problème

Nous formulerons le problème de la stabilité de l'écoulement vibrationnel d'un mélange liquide contenant deux substances diluées, avec une grande différence de densité. Le mélange se trouve dans une couche infinie dans les directions horizontales, et d'épaisseur h .

A l'état d'équilibre du mélange, on satisfait les conditions de l'équilibre thermodynamique: absence de mouvement macroscopique, constance des températures, de la pression et du potentiel chimique. Nous supposons que la violation de l'équilibre est liée à la présence d'un mouvement macroscopique dans le liquide et au changement de la concentration de la substance diluée d'un point à un autre. La température du liquide est supposée constante.

Le déplacement de la substance dans le liquide en mouvement est conditionné par deux mécanismes

tout à fait différents. Premièrement, en présence d'une différence de concentration dans le liquide, apparaît la diffusion moléculaire; deuxièmement, les particules de la substance diluée sont entraînées par le mouvement de ce dernier et sont transférées avec celui-ci. L'ensemble des deux processus est appelé la diffusion convective de la substance dans le liquide [42]. La diffusion moléculaire est un processus irréversible; c'est pourquoi, avec elle (comme avec la viscosité et la conductibilité thermique) est liée la dissipation de l'énergie. Au contraire, le transfert convectif de la substance (le mélange mécanique) est un processus réversible et il n'est pas accompagné par une dissipation de l'énergie [41].

Soit une couche soumise à des oscillations horizontales de fréquence ω et d'amplitude a . Nous dirigerons l'axe z du système cartésien des coordonnées, verticalement. Pour origine des coordonnées, nous choisirons la frontière inférieure de la couche. L'axe x est dirigé le long de l'axe des vibrations (Fig. 2.1).

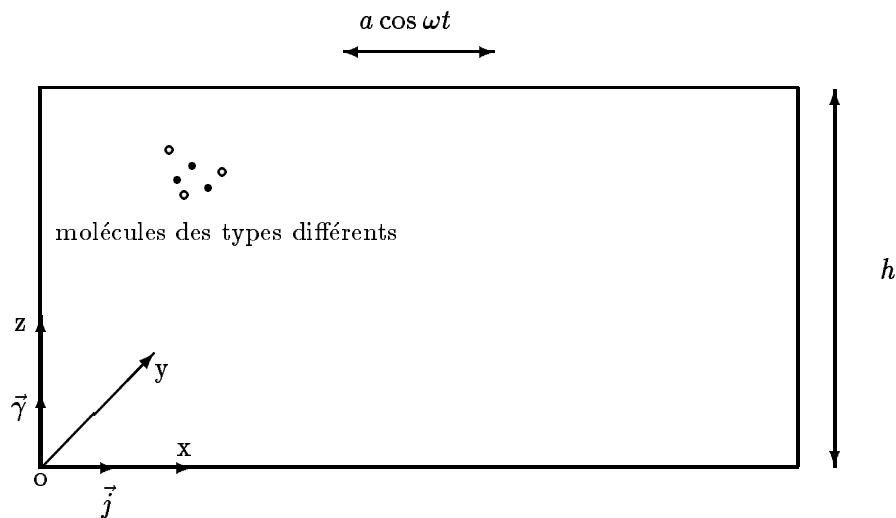


Fig. 2.1 Géométrie du problème.

Dans la Section 2.2, nous supposons que le temps caractéristique diffusif τ_d est grand en comparaison avec la période des vibrations $T = 2\pi/\omega$ et le temps de l'observation τ_o . Les conditions $\tau_d \gg T$ et $\tau_d \gg \tau_o$ permettent en première approximation de ne pas prendre en considération la diffusion moléculaire. Nous vérifierons si les hypothèses données sont correctes (plus exactement, la première de celles-ci, puisque pour la deuxième l'expérimentateur peut toujours la satisfaire). Nous estimerons le temps caractéristique du problème suivant. Soit, au temps $t = 0$ au point $z = 0$ d'une couche d'épaisseur $h = 1 \text{ cm}$, remplie par le liquide, une substance de masse m , qui à $t > 0$ diffuse dans la direction de la coordonnée z croissante. La distribution de la concentration $C(z, t)$ de la

substance donnée, à $t > 0$, est donnée par la formule de Landau [41]

$$C(z, t) = \frac{m}{8\rho(\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right),$$

où ρ est la densité du liquide, D est le coefficient de diffusion. A partir de la condition $C(0, \tau_d) = C(h, \tau_d)$, nous obtenons l'estimation pour le temps caractéristique diffusif:

$$\tau_d \gg \frac{h^2}{4D}.$$

Pour les liquides, le coefficient de diffusion (à la température ambiante) est $\sim 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, et donc, $\tau_d \sim 10^4 \text{ s}$. La période des vibrations à fréquence circulaire 50 Hz (la fréquence du courant alternatif) est égale environ à 0.015 s .

2.2 Cas asymptotique, en l'absence de diffusion moléculaire

2.2.1 Modèle de fluide parfait. Fréquences finies des vibrations

On suppose que l'épaisseur des couches limites $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ (où ν est la viscosité cinématique du liquide) est beaucoup moins grande que toutes les tailles caractéristiques du problème. En d'autres mots, la période des vibrations est supposée petite en comparaison avec le temps de l'amortissement visqueux, mais comparable avec les périodes des modes d'oscillations propres correspondant à des ondes internes gravitationnelles.

La condition $\delta \ll h$ signifie que les termes visqueux seront négligés dans les équations du mouvement; c'est-à-dire que l'étude sera faite dans le cadre du modèle de fluide parfait.

Dans le système de référence lié à la cavité, l'équation du mouvement du liquide en négligeant la dissipation visqueuse prend la forme

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p - g\rho \vec{\gamma} + a\omega^2 \rho \vec{j} \cos \omega t, \quad (2.1)$$

où ρ est la densité du liquide (fonction du temps et des coordonnées); $\vec{\gamma}$ est le vecteur unitaire, dirigé verticalement vers le haut; \vec{j} est le vecteur unitaire le long de l'axe x . Les autres notations sont courantes.

Il faut ajouter à l'équation du mouvement, l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.2)$$

et l'équation d'état qui sera supposée prendre la forme de la condition d'incompressibilité isotherme, c'est-à-dire que nous supposons que les changements de densité, conditionnés par les changements de pression, sont petits, c'est pourquoi

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.3)$$

En d'autres mots, comme on le voit à partir de (2.2), en tenant en compte de (2.3), le changement de la densité est lié seulement au transfert convectif:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho = 0. \quad (2.4)$$

Il faut compléter les équations (2.1), (2.3), (2.4) par la condition limite d'imperméabilité à travers les murs rigides:

$$z = 0, h : \quad \vec{v} \vec{\gamma} = 0. \quad (2.5)$$

En outre, nous supposons vérifiée la condition du caractère fermé de l'écoulement

$$\forall \mathbf{x} : \quad \int_0^h \vec{v} \vec{j} dz = 0. \quad (2.6)$$

Le problème (2.1), (2.3) - (2.6) admet la solution dans laquelle la densité dépend seulement de la coordonnée verticale, sous forme d'un courant 2D fermé

$$\vec{V}_0 = \vec{j} \left(ia\omega \left(\frac{c_1}{\rho_0(z)} - 1 \right) \exp(i\omega t) + C.C. \right), \quad c_1 = const. \quad (2.7)$$

La fonction $\rho_0(z)$ est choisie linéaire

$$\rho_0(z) = \rho_0^{(1)} \left(1 - \frac{z}{h} \right) + \rho_0^{(2)}, \quad \rho_0^{(1)} > 0, \quad \rho_0^{(2)} > 0. \quad (2.8)$$

Comme on le voit à partir de (2.8), $\rho_0^{(2)}$ est la valeur de la densité du liquide près de la frontière supérieure; près de la frontière inférieure, la valeur de la densité est égale $\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}$.

Comme unité de temps, de longueur, de vitesse, de pression et de densité, nous choisirons, respectivement, les valeurs suivantes

$$t^* = 1/\omega; \quad l^* = h; \quad u^* = a\omega; \quad p^* = \rho_0^{(2)} h a \omega^2; \quad \rho^* = \rho_0^{(2)}$$

Les formules (2.7) et (2.8) en variables adimensionnelles ont la forme

$$\vec{V}_0 = \vec{j} \left(i \left(\frac{c_2}{\rho_0} - 1 \right) \exp(it) + C.C. \right), \quad c_2 = const. \quad (2.9)$$

$$\rho_0(z) = 1 + r_0(1 - z), \quad r_0 = \rho_0^{(1)}/\rho_0^{(2)}, \quad (2.10)$$

où r_0 est le paramètre de stratification. Les plus grandes valeurs du paramètre r_0 correspondent à la plus forte stratification (2.10).

Nous recopierons les équations adimensionnelles pour des petites perturbations \vec{u} , p , ρ , linéarisées près de la solution (2.9), (2.10):

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(\vec{V}_0 \nabla) \vec{u} + A(\vec{u} \nabla) \vec{V}_0 \right) + \rho \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial t} = -\nabla p - G_o A^{-1} \rho \vec{\gamma} + \rho \vec{j} \cos t, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + A \vec{V}_0 \nabla \rho + A \vec{u} \nabla \rho_0 = 0, \quad (2.13)$$

$$z = 0, 1 : \quad \vec{u} \vec{\gamma} = 0. \quad (2.14)$$

Ici sont introduits, à titre de paramètres:

- l'amplitude adimensionnelle des vibrations $A = ah^{-1}$
- le rapport $G_o = g/(\hbar\omega^2)$.

Nous examinerons les perturbations 2D normales $\vec{u} = (u, 0, w)$, p, ρ , dépendant de la coordonnée horizontale comme $\exp(ikx)$, où k est le nombre d'onde et nous projetterons le système des équations (2.11) - (2.13) sur les axes de coordonnées:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + ikAV_0 u + Aw \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) + \rho \frac{\partial V_0}{\partial t} = -ikp + \rho \cos t, \quad (2.15)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + ikAV_0 w \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - G_o A^{-1} \rho, \quad (2.16)$$

$$u = \frac{i}{k} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + ikAV_0 \rho = -Aw \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (2.18)$$

$$z = 0, 1 : \quad w = 0. \quad (2.19)$$

En éliminant p et u , nous amenons les équations (2.15), (2.16) à la forme suivante:

$$\rho_0 \left(\frac{i}{k} \frac{\partial \phi}{\partial t} - AV_0 \phi + AV_0'' w \right) + \rho_0' \left(\frac{i}{k} \frac{\partial w'}{\partial t} - AV_0 w' + AV_0' w \right) + \rho' \frac{\partial V_0}{\partial t} + \quad (2.20)$$

$$+ \rho \frac{\partial V_0'}{\partial t} = ikG_o A^{-1} \rho + \rho' \cos t, \quad \phi = w'' - k^2 w$$

Ici, le "prime" désigne la différentiation suivant la coordonnée z . Pour "fermer" le problème, il faut ajouter à l'équation (2.20) l'équation linéaire hétérogène différentielle (2.18) et les conditions aux limites (2.19).

Les perturbations w et ρ arbitraires, continues dans le temps, peuvent être présentées, par le théorème de Fourier, comme la somme (dans le cas général, la somme est infinie) de modes simples sinusoidaux avec les amplitudes et les fréquences cycliquement différentes. Nous approximerons w et ρ par les segments finis des séries de Fourier de la forme:

$$w(z, t) = \sum_{n=-\hat{N}}^{\hat{N}} w_n(z) \exp(int), \quad \rho(z, t) = \sum_{n=-\hat{N}}^{\hat{N}} \rho_n(z) \exp(int),$$

où l'indice n peut prendre les valeurs entières ou demi-entières. Pour les amplitudes $w_n(z)$ et $\rho_n(z)$ "entières" et "demi-entières" des perturbations, nous obtenons deux problèmes aux limites à deux point, linéairement indépendants, admettant la réduction aux problèmes de Cauchy aux conditions initiales [40, 35].

Comme on le sait [48], les perturbations "entières" ont la période du forçage extérieur (cas harmonique, où synchrone), à la différence des perturbations "demi-entières", qui ont la période, égale à la période doublée du forçage extérieur (cas sous-harmonique, où asynchrone). En anticipant, nous noterons que les perturbations asynchrones n'ont pas été découvertes par les calculs numériques. De plus, on peut montrer (en se basant sur la théorie de Floquet), que les solutions asynchrones n'existent pas du tout pour la classe des équations comprenant les équations dont on parle [16]; une discussion plus détaillée sur la méthode que nous appliquons pour la résolution numérique des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires linéaires se trouve dans le Chapitre 3 (§3.3) et dans le Chapitre 4, entièrement consacré à ce problème.

Pour éviter les difficultés liées à la formulation mathématique du problème aux limites, nous passerons aux variables de Lagrange R et W ¹, selon la loi:

$$\rho(z, t) = R(z, t) \exp(-ikA\chi), \quad w(z, t) = W(z, t) \exp(-ikA\chi),$$

où

$$\chi(z, t) = \int V_0(z, t) dt$$

L'équation (2.18), écrite en séries de Fourier, prend la forme

$$inR_n + AW_n\rho'_0 = 0. \quad (2.21)$$

A partir de (2.21), nous concluons que

$$W_0 = 0, \quad (2.22)$$

$$\forall n \neq 0, \quad R_n = \frac{iA}{n} W_n \rho'_0. \quad (2.23)$$

Les conditions (2.22), (2.23) permettent d'exclure de (2.20) tous les R_n , $-\hat{N} \leq n \leq \hat{N}$, et de formuler le problème de Cauchy pour les amplitudes W_n , $n \neq 0$, sous forme fermée. Le passage aux variables de Lagrange rend les équations assez encombrantes (voir l'ANNEXE A).

Le problème de Cauchy a été résolu par intégration numérique, en utilisant la méthode de Adams. Les courbes neutres pour différentes valeurs de G_o et r_0 sont citées sur les Fig. 2.2 - 2.5 (tous les

¹L'utilité de la transformation de Lagrange dans les problèmes de la stabilité hydrodynamique est commentée dans un travail récent de Jacqmin [10], consacré à la stabilité de l'écoulement d'un liquide hétérogène dans un champ de vibrations d'orientation arbitraire

résultats décrits plus bas sont obtenus pour le problème sur les perturbations synchrones). Il y a une instabilité à plusieurs niveaux de l'écoulement, accompagnée par l'instabilité paramétrique. Sur la Fig. 2.2, sont présentées les courbes neutres pour $G_o = 1.6$, $r_0 = 1$ (la densité du liquide près du mur inférieur de la cavité est deux fois plus grande, que près du mur supérieur). L'instabilité paramétrique a lieu dans un intervalle étroit des amplitudes des vibrations.

Nous montrerons que l'instabilité paramétrique est liée avec l'intensification des ondes internes gravitationnelles [41]. Le problème pour les ondes internes est obtenu à partir de (2.15) - (2.19):

$$\lambda \rho_0 u = -ikp, \quad (2.24)$$

$$\lambda \rho_0 w = -\frac{\partial p}{\partial z} - G_o A^{-1} \rho, \quad (2.25)$$

$$u = \frac{i}{k} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.26)$$

$$\lambda \rho = -Aw \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (2.27)$$

$$z = 0, 1 : \quad w = 0. \quad (2.28)$$

Ici, $\lambda = i\omega$ est le décrétement. Finalement, à partir de (2.24) - (2.28) on obtient le problème aux limites:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + S \frac{dw}{dz} - k^2 \left(1 + \frac{G_o}{\omega^2} S\right) w = 0, \quad S = \frac{d}{dz} \ln \rho_0, \quad (2.29)$$

$$z = 0, 1 : \quad w = 0. \quad (2.30)$$

Obtenue par résolution numérique du problème (2.29) - (2.30), la courbe dispersionnelle $\omega(k)$ pour les ondes internes gravitationnelles, correspondant aux valeurs de G_o et r_0 citées ci-dessus, est présentée sur la Fig. 2.6 (à comparer avec la Fig. 2.2). La valeur critique, k^* , où apparaît la résonance, est égale à 8.68. La fréquence des ondes internes est égale à 1 dans nos unités de mesure, c'est-à-dire qu'elle est égale à la valeur de la fréquence du forçage extérieur, et donc elle est égale à la valeur de la fréquence de l'excitation des oscillations dans le domaine principal de la résonance synchrone. On a prouvé que l'instabilité paramétrique est liée avec la pompage de l'énergie en résonance avec les ondes internes gravitationnelles.

Dans la Fig. 2.2, sont insérées les "languettes" résonnantes pour les valeurs $G_o = 1.6$ et 1.37. La réduction du paramètre G_o amène l'évincement de l'instabilité paramétrique dans le domaine aux ondes courtes. Sur la Fig. 2.3, on cite la carte de la stabilité pour $G_o = 0.625$. Pour une si petite valeur de G_o , l'instabilité paramétrique n'a pas été mise en évidence jusqu'à la valeur $k = 50$.

Sur la Fig. 2.4, sont présentées les courbes neutres pour $G_o = 1.6$ et $r_0 = 0.5$ (à comparer avec la Fig. 2.2). La réduction de la stratification amène à l'évincement de l'origine de l'instabilité paramétrique dans le domaine des ondes longues et, en ce sens, est équivalent à l'augmentation du

paramètre G_o . Avec ça, le niveau inférieur de l'instabilité principale est rapproché en bas selon l'amplitude. Une augmentation tout à fait faible du paramètre de stratification r_0 (de 1 jusqu'à 1.11) à G_o fixe, entraîne un décalage sensible de la "languette" dans le domaine à ondes courtes (Fig. 2.5).

Dans la Section 2.3, on montre que l'insertion de la dissipation diffusive et visqueuse se manifeste par la stabilisation de l'instabilité à ondes courtes et, en général, par l'augmentation du seuil de stabilité.

2.2.2 Approximation "haute fréquence"

Si la fréquence des vibrations est assez grande, de sorte que $\omega \gg \nu/L^2$, où L est la taille caractéristique des structures hydrodynamiques (ν étant la viscosité cinématique du liquide), on peut déduire une composante pulsatoire, qui change très vite, et une partie lente, dont les temps caractéristiques de changements sont grands en comparaison avec ω^{-1} [44]. Une décomposition efficace du problème en parties rapide-pulsatoire et lente-"moyenne" est possible, s'il y a des raisons de rejeter les termes non linéaires dans les équations pour la composante pulsatoire du mouvement. La composante pulsatoire de la vitesse du liquide, en ordre de grandeur, est égale à la vitesse $v = a\omega$ de la cavité, dans le système de référence lié au laboratoire. C'est pourquoi on peut rejeter les termes non linéaires si $a^2\omega^2/L \ll a\omega^2$, ce qui impose la restriction sur l'amplitude des vibrations: $a \ll L$. Il est supposé, par la suite, que les conditions $\omega \gg \nu/L^2$ et $a \ll L$ sont remplies, de sorte que l'amplitude des vibrations a est petite et l'amplitude de la vitesse des vibrations $b = a\omega$ est finie.

Suivant la procédure standard [45], nous recopierons les équations du mouvement "moyennées" dans le système de référence lié à la cavité:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla p - \frac{b^2}{2} (\vec{V} + \vec{j})^2 \nabla \rho + \eta \Delta \vec{U} - g \rho \vec{\gamma}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \nabla \rho = 0, \quad (2.32)$$

$$rot \rho (\vec{V} + \vec{j}) = 0, \quad div (\vec{V} + \vec{j}) = 0, \quad div \vec{U} = 0, \quad (2.33)$$

$$z = 0, h : \quad \vec{U} = 0, \quad \vec{V} \vec{\gamma} = 0. \quad (2.34)$$

Ici, \vec{U} est la vitesse moyenne, \vec{V} est l'amplitude de la vitesse pulsatoire, ρ est la densité moyenne.

Pour l'état quasi-stationnaire (qui est caractérisé par l'absence de la vitesse moyenne), on a:

$$\vec{U} = 0, \quad \vec{V}_0 = \vec{j} \left(\frac{c_3}{\rho_0(z)} - 1 \right), \quad c_3 = const., \quad (2.35)$$

où la fonction $\rho_0(z)$ a la forme (2.8) et la constante c_3 est déterminée à partir de la condition du caractère fermé (2.6).

Nous formulerons le problème pour les petites perturbations \vec{u} , \vec{w} , ρ , p de l'état quasi-stationnaire. Par linéarisation du système (2.31) - (2.34) près de la solution (2.35), nous obtenons les équations:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{b^2}{2} (\vec{V}_0 + \vec{j})^2 \nabla \rho + b^2 ((\vec{V}_0 + \vec{j}) \vec{w}) \nabla \rho_0 = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} - \rho g \vec{\gamma}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho_0 = 0, \quad (2.37)$$

$$\text{rot } \rho_0 \vec{w} + \text{rot } \rho (\vec{V}_0 + \vec{j}) = 0, \quad (2.38)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0, \quad \text{div } \vec{w} = 0, \quad (2.39)$$

$$z = 0, \quad h : \quad \vec{u} = 0, \quad \vec{w} \vec{\gamma} = 0. \quad (2.40)$$

En vertu de l'homogénéité du problème (2.36) - (2.40), et de la constance des coefficients, on peut se limiter aux perturbations normales, dépendant du temps et des coordonnées horizontales au moyen du multiplicateur $\exp(\lambda t + i \vec{k} \vec{r})$. On peut montrer que, pour les perturbations neutres ($\lambda = 0$), la vitesse moyenne de l'écoulement tombe à zéro, $\vec{u} = 0$, c'est-à-dire que le point de perte de stabilité coïncide avec le point de bifurcation de l'état quasi-stationnaire. En supposant $\lambda = 0$ et $\vec{u} = 0$, nous rendons les équations adimensionnelles en utilisant les mêmes unités de mesure du temps, de la longueur, de la vitesse et de la pression qu'au §2.2.1.

Le problème de la stabilité prend la forme

$$\frac{M}{2} (\vec{V}_0 + \vec{j})^2 \nabla \rho + M ((\vec{V}_0 + \vec{j}) \vec{w}) \nabla \rho_0 = -\nabla p - \rho \vec{\gamma}, \quad (2.41)$$

$$\text{rot } \rho_0 \vec{w} + \text{rot } \rho (\vec{V}_0 + \vec{j}) = 0, \quad (2.42)$$

$$\text{div } \vec{w} = 0, \quad (2.43)$$

$$z = 0, \quad 1 : \quad \vec{w} \vec{\gamma} = 0. \quad (2.44)$$

Ici, on introduit le paramètre $M = a^2 \omega^2 / gh$, égal au rapport du carré de l'amplitude adimensionnelle des vibrations au paramètre G_o ; la fonction $\rho_0(z)$ a la forme (2.10). La forme de l'équation (2.35), définissant le quasi-équilibre, ne change pas.

Nous nous limiterons à la considération des perturbations planes $\vec{w} = (w, 0, q)$. Ayant projeté les équations (2.41) et (2.42) sur les axes de coordonnées et éliminant p et ρ , ainsi que w (à l'aide de (2.43)), nous venons au problème aux limites

$$q'' + \rho_0' \frac{\rho_0^2 + 4M c_3^2 \rho_0' / \rho_0}{M c_3^2 \rho_0' + \rho_0^3} q' - k^2 \left(\frac{M c_3^2 \rho_0'}{\rho_0^3} + 1 \right) q = 0, \quad (2.45)$$

$$z = 0, \quad 1 : \quad q = 0. \quad (2.46)$$

Le problème (2.45), (2.46) a été résolu par voie numérique par la réduction au problème de Cauchy avec l'intégration directe suivante. Les solutions des problèmes (2.18) - (2.20) (lignes tiretées)

et (2.45) - (2.46) (lignes continues), correspondant à la valeur $G_o = 0.01$, sont présentées sur la Fig.2.7. Ainsi on observe, pour la limite des hautes fréquences, la bonne coïncidence des résultats des approches des deux derniers Paragraphes (§2.2.1 et §2.2.2).

2.3 Formulation complète pour un mélange: avec dissipation

Nous examinerons l'influence de la diffusion moléculaire et de la viscosité sur la stabilité de l'écoulement vibrationnel du mélange liquide.

Nous nous intéresserons au cas où les hétérogénéités de densité (provoquées par les changements de concentration du mélange à cause de la diffusion convective) ne sont pas petites; c'est-à-dire, au cas où le rapport $\delta\rho/\rho$, où $\delta\rho$ est le changement de la densité du mélange pour le volume mis en relief, n'est pas petit. Avec cela, généralement parlant, il faut prendre en considération la compressibilité. Avec la loi d'état arbitraire $\rho = \rho(C)$, où C est la concentration du composant léger, il y a un problème de concordance de l'équation exprimant la loi de conservation de la masse complète du mélange dans la cavité

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) \quad (2.47)$$

et les conditions aux limites. Les calculs ultérieurs ont pour but d'obtenir l'équation d'état, artificielle, ne se trouvant pas en contradiction avec l'équation (2.47) et la condition ordinaire d'imperméabilité

$$v_n|_s = 0 \quad (2.48)$$

pour la vitesse sur la surface s , limitant la cavité (\vec{n} est le vecteur de la normale vers la surface limitante).

Nous écrirons l'équation ordinaire de la diffusion convective [41, 42]:

$$\rho \frac{dC}{dt} = - \operatorname{div} \vec{q} = D \operatorname{div} (\rho \nabla C), \quad (2.49)$$

où D est le coefficient de la diffusion, \vec{q} est le flux diffusif.

A partir de (2.47), (2.49) on obtient, évidemment,

$$\operatorname{div} \vec{q} = \rho^2 \frac{dC}{d\rho} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (2.50)$$

Il est nécessaire d'admettre que les flux de substance sont constants, s'équilibrant l'un l'autre, à travers les frontières de la cavité, pour qu'il y ait un état d'équilibre, de sorte que la masse complète du mélange et les masses de chacun des constituants soient constantes. En effet, en satisfaisant la condition à la limite (2.48) et la condition

$$\oint q_n ds = 0, \quad (2.51)$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = \oint \rho v_n ds = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho C dV = \oint \rho C v_n ds + \oint q_n ds = 0. \quad (2.53)$$

D'autre part, en tenant compte de (2.50) et (2.48)

$$\begin{aligned} \oint q_n ds &= \int \rho^2 \frac{dC}{d\rho} \operatorname{div} \vec{v} dV = \oint \rho^2 \frac{dC}{d\rho} v_n ds + \int \vec{v} \nabla \left(\rho^2 \frac{dC}{d\rho} \right) dV = \\ &= \int \vec{v} \nabla \left(\rho^2 \frac{dC}{d\rho} \right) dV \end{aligned} \quad (2.54)$$

et pour que la condition (2.51) soit satisfaite, il est nécessaire d'exécuter la condition

$$\int \vec{v} \nabla \left(\rho^2 \frac{dC}{d\rho} \right) dV = 0, \quad (2.55)$$

qui, pour une vitesse non nulle, est possible seulement si

$$\rho^2 \frac{dC}{d\rho} = \text{const.} \quad (2.56)$$

Ainsi,

$$\rho = \frac{\rho_*}{1 + \beta C}, \quad (2.57)$$

où ρ_* et β sont des constantes positives. C'est l'équation d'état recherchée.

La condition (2.57) a un sens physique simple. On peut recopier (2.57) comme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_*} + \frac{\beta}{\rho_*} C = V_1 C + V_2 (1 - C), \quad (2.58)$$

où

$$V_1 = \frac{\beta + 1}{\rho_*} = \text{const}(C) \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{1}{\rho_*} = \text{const}(C) \quad (2.59)$$

sont les volumes spécifiques des composants léger et lourd. Ainsi, la condition (2.57) signifie la constance du volume donné pour chaque molécule en dehors de la dépendance de son entourage.

En utilisant (2.57), nous recopierons (2.49) comme

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = D \operatorname{div} \frac{\nabla \rho}{\rho}. \quad (2.60)$$

On fait le remplacement de la variable

$$S = \ln \rho, \quad (2.61)$$

l'équation de la diffusion (2.49) prend ainsi la forme

$$\frac{dS}{dt} = D \Delta S. \quad (2.62)$$

Donc, le système complet des équations hydrodynamiques, dans le système de référence lié au laboratoire, a la forme

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \exp(-S)(-\nabla p + \eta\Delta\vec{v}) - g\vec{\gamma}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)S = D\Delta S = -\operatorname{div}\vec{v}. \quad (2.64)$$

Nous présenterons \vec{v} , S , ρ sous forme de la superposition des parties lentes et rapides (pulsatoires):

$$\vec{v} = \langle \vec{u} \rangle + \tilde{\vec{v}}, \quad S = \langle S \rangle + \tilde{S}, \quad \rho = \langle \rho \rangle + \tilde{\rho} \quad (2.65)$$

et après le mise en "moyenne" [45] pour le temps rapide $\tau = \omega t$ (ω est la fréquence des vibrations), nous arrivons au problème:

$$\langle \rho \rangle \left(\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla \langle \vec{u} \rangle \right) + \frac{1}{2} \langle \tilde{v}^2 \rangle \nabla \langle \rho \rangle = -\nabla \langle p \rangle + \eta \Delta \langle \vec{u} \rangle - \langle \rho \rangle g \vec{\gamma}, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \nabla \langle S \rangle = D \Delta \langle S \rangle = -\operatorname{div} \langle \vec{u} \rangle, \quad (2.67)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\vec{v}} = 0, \quad (2.68)$$

$$\operatorname{rot} (\langle \rho \rangle \tilde{\vec{v}}) = 0, \quad \tilde{\rho} = \langle \rho \rangle \tilde{S}. \quad (2.69)$$

Pour les vibrations monochromatiques, nous introduirons l'amplitude complexe de la vitesse pulsatoire par le rapport

$$\tilde{\vec{v}} = \frac{1}{2} \left(\vec{V} \exp(i\omega t) + \vec{V}^* \exp(-i\omega t) \right).$$

et en omettant les signes $\langle \rangle$ nous aurons

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \frac{1}{4} V^2 \nabla S = \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \eta \Delta \vec{u}) - g\vec{\gamma}, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)S = D \Delta S = -\operatorname{div} \vec{u}, \quad (2.71)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2.72)$$

$$\operatorname{rot} (\rho \vec{V}) = 0, \quad \rho = \exp(S). \quad (2.73)$$

Le problème (2.70) - (2.73) admet la solution quasi-stationnaire, pour laquelle

$$\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0. \quad (2.74)$$

A partir de (2.70) - (2.73), on obtient les équations

$$\Delta S_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \rho_0 \left(\frac{1}{4} \nabla V_0^2 - g\vec{\gamma} \right) = 0, \quad (2.75)$$

définissant l'état quasi-stationnaire.

Par linéarisation de (2.70) - (2.73), près de l'état donné, et en choisissant les grandeurs suivantes comme unité de mesure du temps, de la longueur, de la densité, des vitesses moyenne et pulsatoire, et de la pression :

$$\frac{h^2}{\nu}, \quad h, \quad \rho_0(0), \quad \frac{D}{h}, \quad a\omega, \quad \rho_0(0)\frac{D^2}{h^2},$$

(où $\rho_0(0)$ est la densité du milieu près du mur inférieur de la couche), nous arrivons au problème suivant de la stabilité de l'état quasi-stationnaire par rapport aux petites perturbations, dépendant du temps au moyen du multiplicateur $\exp(\lambda t)$:

$$\lambda \vec{u} + \frac{1}{4} B V_0^2 (\nabla S + S \nabla S_0) + \frac{1}{2} B (\vec{V}_0 \vec{V}) \nabla S_0 = \frac{1}{\rho_0} (-\nabla p + \Delta \vec{u}) - G_d S \vec{\gamma}, \quad (2.76)$$

$$\lambda P_d S + (\vec{u} \nabla) S_0 = \Delta S = - \operatorname{div} \vec{u}, \quad (2.77)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2.78)$$

$$\operatorname{rot} \rho_0 (\vec{V} + S \vec{V}_0) = 0, \quad (2.79)$$

où \vec{u} , \vec{V} , S , p sont les amplitudes des perturbations, et où les paramètres suivants sont introduits:

- $B = a^2 \omega^2 h^2 / (\nu D)$; paramètre vibratoire
- $G_d = g h^3 / (\nu D) = G a P_d$, où $G a = g h^3 / \nu^2$; nombre de Galilée
- $P_d = \nu / D$; nombre de Prandtl diffusif

Pour le problème (2.76) - (2.79), il est facile d'obtenir (à partir de (2.75)) la solution quasi-stationnaire dans laquelle la densité dépend seulement de la coordonnée verticale, sous forme explicite,

$$S_0 = -\mu z, \quad \rho_0 = \exp(-\mu z), \quad \mu = -\ln \hat{r}_0, \quad \hat{r}_0 = \rho_0(1) / \rho_0(0), \quad (2.80)$$

$$\vec{V}_0 = (V_0(z), 0, 0), \quad V_0(z) = c_4 \exp(\mu z),$$

et la constante c_4 est déterminée par la condition du caractère fermé (2.6). Ainsi, le problème est caractérisé par quatre paramètres adimensionnels: le nombre vibratoire B , le paramètre G_d , le nombre de Prandtl diffusif P_d et la différence \hat{r}_0 des densités à l'état quasi-stationnaire.

L'isotropie du problème dans le plan horizontal permet de se limiter aux perturbations planes $\vec{u} = (u, 0, w)$ et $\vec{V} = (\psi_z, 0, -\psi_x)$ (ψ est la fonction de courant; l'indice indique la différentiation selon la variable correspondante). Dans le dernier rapport on prend en considération la condition (2.78) pour le champ de vitesse pulsatoire.

En considérant des perturbations normales (dépendant de x comme $\exp(ikx)$), en projetant le système (2.76) - (2.79) sur les axes de coordonnées, en faisant ensuite le remplacement des variables $u(z) \rightarrow iku(z)$ et en éliminant l'amplitude $p(z)$ des perturbations du champ de pression, nous arrivons

au système d'équations différentielles ordinaires linéaires, du huitième ordre, pour les amplitudes $u(z)$, $w(z)$, $\psi(z)$, $S(z)$:

$$u_{zzz} = \lambda\rho_0 (u_z - \mu u - w) + \frac{1}{4} \frac{BC^2}{\rho_0} \mu S + \frac{1}{2} \mu BC \psi_z + 2k^2 u_z + \quad (2.81)$$

$$+ \mu (k^2 u + \mu w - \lambda P_d S) - \lambda P_d S_z - k^2 w - G_d \rho_0 S,$$

$$w_z = k^2 u + \mu w - \lambda P_d S, \quad (2.82)$$

$$S_{zz} = (\lambda P_d + k^2) S - \mu w, \quad (2.83)$$

$$\psi_{zz} = k^2 \psi + \mu \psi_z - \frac{C}{\rho_0} S_z. \quad (2.84)$$

Sur les frontières rigides de la couche nous admettrons les conditions aux limites ordinaires de non glissement pour le champ de la vitesse moyenne \bar{u} , d'imperméabilité pour le champ de la vitesse pulsatoire \vec{V} , ainsi que la condition d'absence de perturbations du flux de substance à travers les frontières:

$$z = 0, 1 : \quad u = w = \psi = S_z = 0. \quad (2.85)$$

Pour la solution du problème spectral (2.81) - (2.85), on utilise la méthode de réduction du problème aux limites au problème de Cauchy avec l'intégration directe suivante à travers la couche (les résultats ont été contrôlés par la méthode de passage différentiel [35]).

Les résultats des calculs pour $\lambda = 0$ (courbes neutres) sont présentés sur les Figs. 2.8 - 2.10. L'instabilité vibratoire n'a pas été mise en évidence. Les calculs avaient pour but d'observer l'influence de la diffusion sur la stabilité de l'état de quasi-équilibre. La différence des densités ρ_0 pour l'état de quasi-équilibre était fixée à 0.25 (la densité du mélange près du mur inférieur de la cavité est quatre fois plus grande, que près du mur supérieur).

Sur les Figs. 2.8 et 2.9 sont présentées les courbes neutres correspondant aux valeurs du nombre de Prandtl diffusif égales à 1 et 10 (les valeurs caractéristiques de G_d sont égales à 10^7 et 10^8 , en prenant $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$, $g = 10^3 \text{ cm}/\text{s}^2$, $h = 1 \text{ cm}$) Comme on s'y attendait, la dissipation supprime l'instabilité aux ondes courtes et les perturbations 2D avec longueur d'onde finie deviennent les plus dangereuses. Avec l'augmentation de P_d , le minimum de la courbe neutre inférieure se décale vers le domaine des ondes courtes ($k_{crit} \approx 15.7$ à $P_d = 1$, $k_{crit} \approx 26.3$ à $P_d = 10$), mais le seuil de la stabilité augmente. Comme on le sait [42], ces valeurs du nombre de Prandtl diffusif correspondent aux gaz; pour les liquides on peut avoir $P_d \sim 10^3$. Ainsi, pour ces liquides, où la diffusion est faible en comparaison avec les gaz, les perturbations les plus dangereuses seront les perturbations à longueur d'onde très courte mais finie ($k_{crit} \in [100, 200]$). L'analyse asymptotique, sans tenir compte de la dissipation (§2.2), montre que les perturbations les plus dangereuses sont celles à longueur d'onde infinitésimale (Fig. 2.2 - 2.7). Pour montrer plus concrètement la dépendance du seuil de P_d , nous

avons présenté le paramètre vibratoire B sous forme de produit $B_* P_d$ et repris les courbes neutres inférieures correspondant aux valeurs (de haut en bas) $P_d = 0.001, 0.1, 1, 10$ et 10^4 sur le plan (k, B_*) (Fig. 2.10). Dans cette formulation, le seuil de stabilité baisse lorsque P_d augmente. Sur les Figs. 2.11 et 2.12, on représente les fonctions propres du problème de stabilité neutre pour les valeurs de $P_d = 0.1$ et 0.001 , respectivement (pour de plus grandes valeurs de P_d , la précision du calcul des fonctions propres est plus mauvaise); il s'agit des perturbations $\rho(x, z)$, $u(x, z)$ et $w(x, z)$ correspondant aux minima des niveaux inférieurs de l'instabilité (voir Fig. 2.10). Pour $P_d = 0.1$, le quasi-équilibre est violé surtout près de la frontière supérieure de la couche; pour le reste du volume les perturbations sont petites (Fig. 2.11). Lorsqu'on diminue P_d , l'intensité de la diffusion grandit et les perturbations diffusent dans le volume principal. Leur longueur d'onde augmente aussi (Fig. 2.12, $P_d = 0.001$).

C'est une place pour la figure f2.2-2.3

C'est une place pour la figure f2.4-2.5

C'est une place pour la figure f2.6

C'est une place pour la figure f2.7

C'est une place pour la figure f2.8-2.9

C'est une place pour la figure f2.10

C'est une place pour la figure f2.11

C'est une place pour la figure f2.12

2.4 Conclusion

Ainsi, les vibrations horizontales progressives du récipient contenant un mélange fortement stratifié, amènent l'apparition de plusieurs niveaux d'instabilité aux ondes courtes, avec le seuil fini en l'absence de dissipation. A part l'instabilité de ce type, a lieu l'instabilité paramétrique, liée au pompage résonnant de l'énergie (forçage extérieur) dans les ondes internes gravitationnelles. Ce type d'instabilité est caractérisé par un seuil d'excitation nul en l'absence de dissipation, et a lieu pour des intervalles étroits des nombres d'onde. En plus, on peut dire que l'instabilité est possible pour une intensité infinitésimale du forçage vibratoire sur le liquide.

Cependant, l'insertion du mécanisme dissipatif, par exemple de la diffusion moléculaire et de la viscosité, permet de stabiliser l'instabilité des ondes courtes et, probablement, d'augmenter le seuil de l'excitation de l'instabilité résonnante. Plus dangereuses deviennent les perturbations avec longueur d'onde finie. La réduction de l'intensité de la diffusion entraîne l'augmentation du seuil de stabilité et la réduction de la longueur d'onde de la perturbation la plus dangereuse. Pour une intensité de diffusion faible, les perturbations restent localisées près d'une des frontières de la cavité; tandis qu'avec l'augmentation de cette intensité, les perturbations diffusent dans le volume.

CHAPITRE 3

STABILITÉ DE L'INTERFACE ENTRE DEUX LIQUIDES IMMISCIBLES SOUMIS À UN CHAMP DE VIBRATIONS TANGENTIELLES

Dans la première Partie de ce Chapitre (§3.1), on donne la position du problème de la stabilité pour l'interface. La Section 3.2 est consacrée à l'analyse linéaire de la stabilité dans le cadre du modèle de fluide parfait, et on examine les vibrations de fréquence finie. En conclusion de cette Partie, est décrit le modèle phénoménologique, avec prise en considération des effets dissipatifs dus au frottement visqueux. Dans la Section 3.3, on examine le problème de la stabilité linéaire en formulation complète, c.à-d. pour les liquides visqueux. On présente aussi une brève description de la méthode de résolution numérique des problèmes spectraux et les résultats des calculs sont comparés aux résultats obtenus avec l'utilisation du modèle de fluide parfait. Dans la dernière Section du présent Chapitre (§3.4), on fait l'analyse faiblement non-linéaire de l'instabilité des ondes longues dans le cadre de l'approximation des hautes fréquences de vibrations.

3.1 Position du problème

Comme on l'a déjà remarqué dans l'introduction, l'apparition d'un relief immobile sur l'interface entre deux liquides immiscibles soumis à un champ de vibrations horizontales, et l'apparition du relief de type seuil, ont été découverts expérimentalement [25, 28]. Un relief d'onde est observé

seulement quand les densités des liquides sont comparables; en tout cas, pour une surface libre, il n'apparaît pas.

La description théorique de ces phénomènes a été donnée en [44] dans le cadre de l'approximation des hautes fréquences et le procédé de la "moyenne". Mais, il était supposé que les deux paramètres sont asymptotiquement petits, simultanément: l'épaisseur relative des couches limites visqueuses $\delta = L^{-1}\sqrt{\nu/\omega}$ (où ν est la viscosité cinématique, ω est la fréquence des vibrations, L est une taille caractéristique des structures hydrodynamiques) et l'amplitude adimensionnelle des vibrations $\epsilon = a/L$. Dans ce cas limite, la possibilité de la description de la résonance paramétrique disparaît et il reste seulement le mode principal de l'instabilité, lié au développement de l'instabilité de Kelvin - Helmholtz à la frontière de deux écoulements de sens opposés.

La possibilité de la résonance paramétrique existe en refusant le passage limite $\epsilon \rightarrow 0$. Ici, on étudie ce cas. La condition $\delta \rightarrow 0$ est retenue dans les Sections 3.2 et 3.4 ce Chapitre, tandis qu'elle est rejetée, dans la Section 3.3.

La considération du problème pour un domaine limité se heurte aux difficultés techniques de la description du comportement de l'interface près des murs verticaux. Ces difficultés ne sont pas liées à l'essence des phénomènes physiques examinés. Pour cette raison, on considèrera une couche infinie dans les directions horizontales, d'épaisseur $h = h_1 + h_2$, remplie par deux liquides immiscibles incompressibles avec les densités ρ_1 et ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Supposons que la couche subisse des oscillations horizontales de fréquence ω et d'amplitude a . Soit z l'axe vertical du système cartésien des coordonnées, dirigé vers le haut. Nous choisirons l'origine des coordonnées de manière qu'en l'absence des vibrations le liquide lourd se trouve dans le domaine $-h_1 < z < 0$, et le liquide léger dans le domaine $0 < z < h_2$. L'axe x est dirigé le long de l'axe des vibrations.

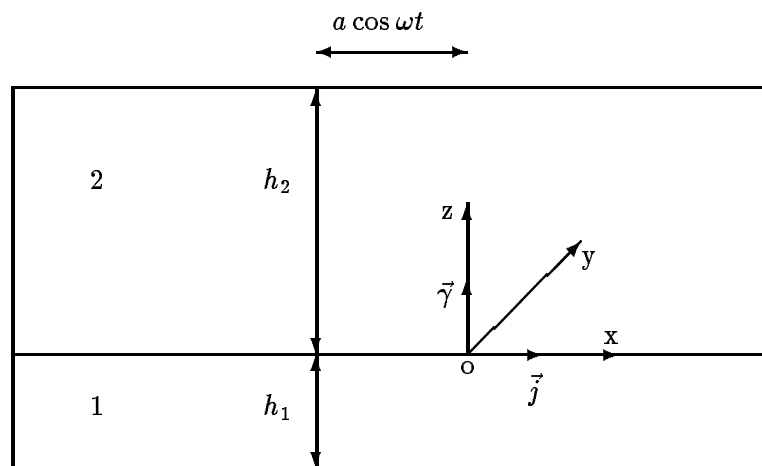


Fig. 3.1 Géométrie du problème.

3.2 Approximation de fluide parfait

Nous supposons que l'épaisseur de couche limite visqueuse est beaucoup moins grande que toutes les tailles caractéristiques du problème, mais nous n'imposons aucune restriction pour les autres grandeurs. En d'autres mots, la période des vibrations est supposée petite en comparaison avec le temps de l'amortissement visqueux, mais comparable avec le temps capillaire - gravitationnel, ce qui signifie la possibilité de résonance avec les ondes capillaire - gravitationnelles. La condition $\delta \ll 1$ signifie que dans les équations du mouvement on va négliger les termes visqueux, c'est-à-dire qu'on se place dans le cadre du modèle du fluide parfait.

Les équations du mouvement et de continuité, en négligeant la dissipation visqueuse dans le système de référence lié à la couche, ont la forme:

$$\frac{\partial \vec{v}_\beta}{\partial t} + (\vec{v}_\beta \nabla) \vec{v}_\beta = -\frac{1}{\rho_\beta} \nabla p_\beta - g \vec{\gamma} + a \omega^2 \vec{j} \cos \omega t, \quad (3.1)$$

$$\text{div } \vec{v}_\beta = 0. \quad (3.2)$$

Ici, l'indice $\beta = 1, 2$ numérote les liquides, $\vec{\gamma}$ est le vecteur unitaire dirigé verticalement, vers le haut; \vec{j} est le vecteur unitaire le long de l'axe x .

Aux frontières rigides de la couche, on met les conditions d'imperméabilité:

$$z = -h_1 : \quad \vec{v}_1 \vec{\gamma} = 0; \quad z = h_2 : \quad \vec{v}_2 \vec{\gamma} = 0. \quad (3.3)$$

A l'interface $z = \xi(x, y, t)$, on satisfait les conditions suivantes: (a) équilibre des tensions normales, (b) continuité des composantes normales de la vitesse et (c) condition cinématique:

$$p_1 - p_2 = \alpha \text{div } \vec{n}, \quad (3.4)$$

$$\vec{v}_1 \vec{n} = \vec{v}_2 \vec{n}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\vec{v}_1 \nabla) \xi = \vec{v}_1 \vec{\gamma}. \quad (3.6)$$

Ici, \vec{n} est le vecteur unitaire de la normale vers l'interface, dirigé du liquide inférieur au deuxième; α est le coefficient de tension interfaciale.

En outre, nous supposerons accomplie la condition du caractère fermé de l'écoulement:

$$\forall x : \quad \int_{-h_1}^{\xi} \vec{v}_1 \vec{j} dz + \int_{\xi}^{h_2} \vec{v}_2 \vec{j} dz = 0. \quad (3.7)$$

3.2.1 Écoulement principal et problème de stabilité linéaire

Le problème (3.1) - (3.7) admet une solution simple, correspondant à l'interface plane $\xi = 0$ et l'écoulement 2D:

$$\vec{V}_\beta = U_\beta \vec{j} \sin \omega t, \quad U_1 = a\omega \frac{h_2(\rho_1 - \rho_2)}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1}, \quad U_2 = -a\omega \frac{h_1(\rho_1 - \rho_2)}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1}, \quad (3.8)$$

$$p_\beta = -\rho_\beta g z + a\omega^2 \rho_1 \rho_2 \frac{h_1 + h_2}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1} x \cos \omega t. \quad (3.9)$$

Nous remarquerons que dans le cas des densités égales \vec{V}_1 et \vec{V}_2 tombent à zéro, c'est-à-dire que les liquides sont immobiles par rapport à la couche; tandis que pour $\rho_2 \ll \rho_1$, le liquide inférieur est immobile par rapport au système de référence lié au laboratoire ($U_1 = a\omega$).

Pour l'étude de la stabilité de l'état principal avec l'interface plane, nous formulerons le problème pour les petites perturbations. Par linéarisation de (3.1) - (3.7) près de la solution (3.8), (3.9), nous obtenons les équations et les conditions de frontières suivantes:

$$\frac{\partial \vec{v}_\beta}{\partial t} + (\vec{V}_\beta \nabla) \vec{v}_\beta = -\frac{1}{\rho_\beta} \nabla p_\beta, \quad \text{div } \vec{v}_\beta = 0 \quad (3.10)$$

$$z = -h_1 : \quad \vec{v}_1 \vec{\gamma} = 0; \quad z = h_2 : \quad \vec{v}_2 \vec{\gamma} = 0 \quad (3.11)$$

$$z = 0 : \quad p_1 - p_2 - (\rho_1 - \rho_2)g\xi = -\alpha \Delta \xi, \quad (3.12)$$

$$\vec{v}_1 \vec{\gamma} - (\vec{V}_1 \nabla) \xi = \vec{v}_2 \vec{\gamma} - (\vec{V}_2 \nabla) \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\vec{V}_1 \nabla) \xi = \vec{v}_1 \vec{\gamma}. \quad (3.13)$$

Nous examinerons des perturbations normales, dépendant des coordonnées horizontales comme $\exp(i\vec{k}\vec{r})$, où \vec{k} est le vecteur de l'onde. Il est facile de s'assurer que l'amplitude des vibrations a et l'angle ϕ entre les vecteurs \vec{k} et \vec{j} font partie du problème seulement par la combinaison $a \cos \phi$. Cela signifie qu'il y a un analogue du théorème de Squire - le comportement des perturbations avec $\phi \neq 0$ est identique au comportement des perturbations 2D, mais à une plus petite amplitude des vibrations. A ce titre nous examinons seulement les perturbations 2D avec le vecteur d'onde parallèle à l'axe des vibrations.

Le problème (3.10) - (3.13) admet (y compris pour les perturbations 2D) la séparation complète des variables. En supposant que

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \vec{\gamma} &\sim sh[k(z + h_1)], & \vec{v}_1 \vec{j} &\sim ch[k(z + h_1)], & p_1 &\sim ch[k(z + h_1)], \\ \vec{v}_2 \vec{\gamma} &\sim sh[k(z - h_2)], & \vec{v}_2 \vec{j} &\sim ch[k(z - h_2)], & p_2 &\sim ch[k(z - h_2)], \end{aligned}$$

à partir de (3.10) - (3.13), nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires pour les amplitudes des perturbations. En éliminant de ce système les amplitudes de la vitesse et de la

pression, après quelques transformations simples, nous nous ramenons à l'équation de type Hill pour ξ :

$$(F_1 + F_2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2ik \frac{d\xi}{dt} (F_1 U_1 + F_2 U_2) \sin \omega t + \xi (\alpha k^3 + (\rho_1 - \rho_2) g k + i(F_1 U_1 + F_2 U_2) k \omega \cos \omega t - k^2 (F_1 U_1^2 + F_2 U_2^2) \sin^2 \omega t) = 0, \quad (3.14)$$

$$F_1 = \rho_1 \operatorname{cth}(kh_1), \quad F_2 = \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2).$$

3.2.2 Réduction à l'équation de Mathieu

Nous éliminons le terme de dérivée première, après avoir fait le remplacement de variable:

$$\xi(t) = Y(t) e^{i\Phi(t)}, \quad \Phi = \frac{k}{\omega} \frac{F_1 U_1 + F_2 U_2}{F_1 + F_2} \cos \omega t. \quad (3.15)$$

Puisque Φ est réel, ξ et Y sont égaux en module, c.à-d. que ξ et Y sont équivalents du point de vue de la stabilité. En conséquence, pour Y , nous obtenons l'équation standard de Mathieu [48, 49]:

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + (A - Q \cos^2 t) Y = 0, \quad (3.16)$$

$$Q = \frac{4B_v k^2}{We} \frac{\rho \operatorname{cth}(kH_1) \operatorname{cth}(kH_2)}{(\rho \operatorname{cth}(kH_1) + \operatorname{cth}(kH_2))^2} \frac{(H_1 + H_2)^2 (\rho - 1)^2}{(H_1 + H_2 \rho)^2},$$

$$A = \frac{k(1 + k^2)}{We} \frac{\rho - 1}{\rho \operatorname{cth}(kH_1) + \operatorname{cth}(kH_2)},$$

$$L = (\alpha/g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}, \quad We = \omega^2 L/g, \quad \rho = \rho_1/\rho_2, \quad H_1 = h_1/L,$$

$$H_2 = h_2/L, \quad B_v = \frac{a^2 \omega^2}{4} \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{g\alpha} \right)^{1/2} = \frac{1}{4} \epsilon^2 We.$$

Ici, on utilise comme unité du temps, l'inverse de la fréquence des vibrations, et comme unité de longueur - la constante capillaire L ; We est le nombre de Weber, le paramètre B_v caractérise l'intensité des vibrations. Les carrés des paramètres H_1 et H_2 sont, en réalité, les nombres de Bond, définis avec les épaisseurs des couches correspondantes et la différence des densités.

Les solutions de l'équation (3.16), correspondant à la frontière de stabilité, se partagent en deux classes:

- Y_+ , de période π (appelées: perturbations harmoniques, où synchrones) et
- Y_- , de période 2π (appelées: perturbations sous-harmoniques, où asynchrones) (voir, par exemple [49]).

Les solutions asynchrones sont anti-périodiques (elles changent de signe lors d'un décalage de π). Cependant la fonction $\xi_-(t)$, d'après (3.15), ne possède pas les caractéristiques d'anti-périodicité. Lors du décalage d'une période, les deux solutions restent invariantes et en ce sens, elles sont synchrones. Lors du décalage de π , les solutions $\xi_-(t)$ seront transformées selon la règle $\xi_-(t + \pi) = -\xi_-^*(t)$ (si Y est choisi réel, ce qui est toujours possible), alors que $\xi_+(t + \pi) = \xi_+^*(t)$.

L'existence de deux classes de perturbations critiques est liée à l'invariance de l'équation (3.14) par rapport au décalage d'une demi-période et au couplage complexe.

En utilisant les résultats connus de l'étude des domaines de résonance paramétrique pour l'équation (3.16) [49], on peut facilement construire les frontières des domaines de l'instabilité en fonction des paramètres B_n et k . Sur les Figs. 3.2 et 3.3, sont présentées les courbes neutres pour le problème (3.16) et les nombres de Weber 10 et 100 (le rapport des densités $\rho = 2$, les épaisseurs des couches $H_1 = H_2 = 1$). Les domaines d'instabilité paramétrique ("languettes") avec leurs bouts étroits touchent l'axe des abscisses, et le point k_n , où le domaine numéro n touche l'axe k , est défini par l'équation

$$A(k_n, We) = n^2$$

Avec l'augmentation du nombre de Weber, c'est-à-dire avec l'augmentation de la fréquence des vibrations, les points k_n se rapprochent du domaine des ondes courtes.

Ainsi, déjà pour une amplitude infinitésimale des vibrations, il y a une instabilité paramétrique. Avec l'augmentation de la fréquence des vibrations, cette instabilité se déplace vers le domaine des ondes courtes, où elle peut être efficacement supprimée par la viscosité. Le changement de la fréquence des vibrations influence peu la forme et la position de la frontière de l'instabilité de Kelvin - Helmholtz. En particulier, il est facile de s'assurer que le comportement asymptotique des ondes longues de la frontière de la zone principale de l'instabilité ne dépend pas du tout du nombre de Weber. En effet, pour k petits, Q et A sont proportionnels à k^2 , c'est-à-dire qu'ils sont petits, et la frontière de l'instabilité est donnée par la formule asymptotique $Q = 2A$. Dans cette égalité, le nombre de Weber est réduit et finalement, pour la limite des ondes longues ($\lim_{k \rightarrow 0} B_v(k)$), on trouve le résultat, qui coïncide avec celui obtenu en [37] dans le cadre de la méthode de la "moyenne".

3.2.3 Amortissement visqueux (modèle phénoménologique)

Pour tenir compte en première approximation de la dissipation, nous introduirons l'amortissement directement dans l'équation (3.14) du type Hill pour l'amplitude de la déformation de l'interface par rapport à la position plane:

$$(F_1 + F_2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt} (2ik(F_1 U_1 + F_2 U_2) \sin \omega t + \lambda_1 (F_1 + F_2)) + \xi (\alpha k^3 + (\rho_1 - \rho_2) g k + i(F_1 U_1 + F_2 U_2) k \omega \cos \omega t - k^2 (F_1 U_1^2 + F_2 U_2^2) \sin^2 \omega t) = 0 \quad (3.17)$$

Pour le coefficient d'amortissement λ_1 , nous utilisons le décrément propre de l'amortissement visqueux des petites oscillations visqueuses [41]. Le problème correspondant prend la forme:

$$\lambda u_\beta = -\frac{ik}{\rho_\beta} p_\beta + \nu_\beta \Delta u_\beta, \quad (3.18)$$

$$\lambda w_\beta = -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial z} + \nu_\beta \Delta w_\beta, \quad (3.19)$$

$$u_\beta = \frac{i}{k} \frac{\partial w_\beta}{\partial z}, \quad (3.20)$$

$$z = -h_1 : \quad u_1 = 0, \quad w_1 = 0; \quad z = h_2 : \quad u_2 = 0, \quad w_2 = 0, \quad (3.21)$$

$$z = 0 : \quad [u] = 0, \quad [w] = 0, \quad (3.22)$$

$$[p] - [\rho]g\xi - 2\frac{\partial w}{\partial z}[\eta] = \alpha k^2 \xi, \quad (3.23)$$

$$[\eta \frac{\partial u}{\partial z}] + ikw[\eta] = 0, \quad (3.24)$$

$$\lambda \xi = w. \quad (3.25)$$

Ici λ est le décrément, u_β et w_β sont les composantes du champ de la vitesse, suivant la tangente et la normale à l'interface, respectivement; le saut de la grandeur à l'interface est désigné par les crochets, par exemple $[p] = p_1 - p_2$; les autres notations sont courantes. A partir de (3.18) - (3.20) nous obtenons

$$w_\beta = C_\beta ch(\alpha_\beta z) + D_\beta sh(\alpha_\beta z) - \frac{k}{\lambda \rho_\beta} (A_\beta sh(kz) + B_\beta ch(kz)), \quad (3.26)$$

$$u_\beta = \frac{i\alpha_\beta}{k} (C_\beta sh(\alpha_\beta z) + D_\beta ch(\alpha_\beta z)) - \frac{ik}{\lambda \rho_\beta} (A_\beta ch(kz) + B_\beta sh(kz)), \quad (3.27)$$

où $A_\beta, B_\beta, C_\beta, D_\beta$ sont des constantes et $\alpha_\beta = (k^2 + \lambda/\nu_\beta)^{1/2}$. La substitution de (3.26) - (3.27) dans les conditions aux limites (3.21) - (3.25), donne

$$C_1 = D_1, \quad C_2 = -D_2, \quad B_1 = A_1 \frac{\alpha_1 t_1 - k}{\alpha_1 - kt_1}, \quad B_2 = -A_2 \frac{\alpha_2 t_2 - k}{\alpha_2 - kt_2},$$

$$t_1 \equiv th(kh_1), \quad t_2 \equiv th(kh_2)$$

et le système des équations linéaires homogènes pour la définition des A_1, A_2, D_1, D_2 . La condition de l'existence de la solution non triviale de ce système consiste à évaluer son déterminant à zéro:

$$D \equiv \begin{vmatrix} -a_4 & a_5 & a_6 & -a_7 \\ -a_4 a_1 & a_5 a_2 & 1 & 1 \\ 1 + a_4(a_3 a_1 - a_{12}) & -1 & -a_3 + a_6 a_{12} & 0 \\ -a_{10} & a_{11} & a_8 & a_9 \end{vmatrix}, \quad (3.28)$$

où

$$a_1 = \frac{\alpha_1 t_1 - k}{\alpha_1 - kt_1}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_2 t_2 - k}{\alpha_2 - kt_2}, \quad a_3 = \frac{g}{\lambda} (\rho_1 - \rho_2) + \frac{\alpha k^2}{\lambda},$$

$$a_4 = \frac{k}{\lambda \rho_1}, \quad a_5 = \frac{k}{\lambda \rho_2}, \quad a_6 = \frac{\alpha_1}{k}, \quad a_7 = \frac{\alpha_2}{k},$$

$$a_8 = \eta_1 \frac{\alpha_1^2 + k^2}{k}, \quad a_9 = \eta_2 \frac{\alpha_2^2 + k^2}{k},$$

$$a_{10} = \frac{2k^2\eta_1}{\lambda\rho_1}, \quad a_{11} = \frac{2k^2\eta_2}{\lambda\rho_2}, \quad a_{12} = 2k(\eta_2 - \eta_1).$$

Nous présenterons ν_1 , ν_2 et λ sous forme de séries en puissance du petit paramètre ϵ :

$$\nu_1 = \epsilon^2\nu_1^{(1)} + \epsilon^3\nu_1^{(2)} + \dots, \quad \nu_2 = \epsilon^2\nu_2^{(1)} + \epsilon^3\nu_2^{(2)} + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + \dots \quad (3.29)$$

A partir de la condition $D = 0$, nous obtenons (après adimensionnalisation) aux ordres principaux en ϵ :

$$\lambda_0^2 = -\frac{1}{We} \frac{k(1+k^2)(\rho-1)t_1t_2}{\rho t_2 + t_1}, \quad (3.30)$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)We^{-1/2}\sigma \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{L_5 + L_6} L_7, \quad (3.31)$$

$$L_1 = -2k\rho(2 + \nu^{1/2}(t_1^2 - 1) + \nu^{-1/2}(t_2^2 - 1))t_1t_2,$$

$$L_2 = -2k(\rho^2(t_2^2 - 2) + t_1^2 - 2)t_1t_2,$$

$$L_3 = 2k\rho(t_1(t_2^2 - 2) + t_2\nu^{1/2}(t_1^2 - 1))(\rho t_2 + t_1),$$

$$L_4 = 2k(t_2(t_1^2 - 2) + t_1\nu^{-1/2}(t_2^2 - 1))(\rho t_2 + t_1),$$

$$L_5 = (\rho(t_1 + t_2\nu^{-1/2}) + \rho^2t_2 + t_1\nu^{-1/2})t_1t_2,$$

$$L_6 = 3(\rho + \nu^{-1/2})(\rho t_2 + t_1)t_1t_2, \quad L_7 = \left(\frac{k(1+k^2)(\rho-1)t_1t_2}{\rho t_2 + t_1} \right)^{1/4},$$

$$\nu = \nu_1/\nu_2, \quad \sigma = \nu_2^{1/2}(gL^3)^{-1/4}.$$

La nature "complexe" de la grandeur λ_1 est liée au déplacement visqueux de la fréquence.

L'équation (3.17), après remplacement de la variable (3.15) et adimensionnalisation, est réduite à l'équation pour la variable Y , où la dissipation visqueuse est prise en considération de façon explicite:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dY}{dt} + (A - Q \cos^2 t + i\lambda_1 b \sin t)Y = 0. \quad (3.32)$$

Ici Q et A sont définis par les expressions (3.16) et le paramètre adimensionnel b est introduit. Ce paramètre ne présente pas d'intérêt pour la suite, c'est pourquoi nous ne citons pas son expression explicite.

Nous étudions l'influence de la viscosité sur le seuil de la stabilité dans le premier domaine de résonance. Le premier domaine de résonance a pour origine le point $(A = 1, Q = 0)$ [49]. En appliquant la technique connue de la méthode des échelles multiples à l'équation (3.32), nous obtenons l'expression implicite suivante pour la courbe neutre aux petites amplitudes du pompage:

$$\left(s - \frac{Q}{2}\right)^2 + \Re(\lambda_1)^2 = \frac{Q^2}{16}, \quad s = \left. \frac{\partial A}{\partial k} \right|_{k=k_0} (k - k_0), \quad (3.33)$$

où k_0 est défini à partir de la condition $A = 1$. Finalement, les racines carrées de l'équation quadratique (3.33) (étant la fonction du nombre d'onde) donnent les branches de la courbe neutre. Bien que la formule (3.33) soit obtenue en supposant que le paramètre σ est petit, les courbes neutres sont représentées sur la Fig. 3.4, pour illustration, dans le cas de viscosités égales ($\nu = 1$), pour un nombre de Weber égal à 100 et pour les valeurs 1, 2 et 4 du paramètre σ . Ainsi, pour une augmentation du paramètre "visqueux" σ , le seuil de la stabilité augmente. Sur la Fig. 3.5, sont présentées les courbes neutres pour $We = 100$ et $\sigma = 1$; le paramètre ν , ayant les valeurs 0.1, 0.5, 1, 5 et 10. Comme on le voit, l'interface est plus stable (pour $H_1 = H_2$) si la viscosité du liquide inférieur est plus grande que la viscosité du liquide supérieur, ce qui est le cas ordinaire pour les écoulements des liquides bicouches [23]. Pour d'autres domaines résonnants, on trouve le seuil de stabilité de la même manière.

On peut écrire les formules (3.16), (3.18) sous la forme brève suivante:

$$A = \frac{\theta(k)}{We}, \quad Q = \frac{B_v}{We} \mu(k), \quad \lambda_1 = \sigma We^{-1/2} \chi(k). \quad (3.34)$$

A partir de (3.33) et (3.34), nous obtenons la valeur critique du paramètre B_v :

$$B_v^* = \frac{We Q^*}{\mu(k)} = 4\sigma \frac{|\Re(\chi(k))|}{\mu(k)} We^{1/2} = D(k)\sigma.$$

Ainsi, pour un faible amortissement, le seuil de la stabilité est proportionnel à la racine carrée de la viscosité. La dépendance de la hauteur du seuil avec le nombre de Weber est définie par le coefficient D :

$$D(k) = 4 \frac{|\Re(\chi(k))|}{\mu(k)} \theta(k)^{1/2}.$$

Cette dernière expression, avec le premier rapport de (3.34), établit la dépendance $D(We)$ sous forme paramétrique (Fig. 3.6). Avec la croissance de la fréquence des vibrations, le seuil de l'instabilité croît d'une manière monotone.

3.3 Formulation complète: problème linéaire de la stabilité pour les liquides visqueux

Dans ce Paragraphe, pour simplifier le problème, il est supposé que les couches liquides ont une épaisseur identique $h_1 = h_2 = h$. Nous choisirons les unités de temps, de longueur, de vitesse et de pression, de la manière suivante:

$$1/\omega; \quad h; \quad a\omega; \quad \rho_2 h a \omega^2.$$

En supposant que les liquides sont visqueux, nous recopierons les équations adimensionnelles du mouvement et de continuité, dans le système de référence lié à la couche:

$$\frac{\partial \vec{v}_\beta}{\partial t} + A(\vec{v}_\beta \nabla) \vec{v}_\beta = -R_\beta \nabla p_\beta + \Omega_\beta^{-1} \Delta \vec{v}_\beta - G_o A^{-1} \vec{\gamma} + \vec{k} \cos t, \quad (3.35)$$

$$\text{div } \vec{v}_\beta = 0. \quad (3.36)$$

Aux frontières rigides de la couche, on définit les conditions de non glissement:

$$z = -1 : \quad \vec{v}_1 = 0; \quad z = 1 : \quad \vec{v}_2 = 0. \quad (3.37)$$

A l'interface $z = \xi(x, y, t)$ on satisfait les conditions (a) d'équilibre des tensions normales, (b) de continuité de la vitesse et (c) la condition cinématique:

$$[p]n_i = (\Omega_1^{-1} \rho^{-1} \sigma_{ik}^{(1)} - \Omega_2^{-1} \sigma_{ik}^{(2)})n_k + A^{-1} We^{-1} n_i \text{div } \vec{n}, \quad (3.38)$$

$$[\vec{v}] = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\vec{v}_1 \nabla) \xi = \vec{v}_1 \vec{\gamma}. \quad (3.40)$$

La condition du caractère fermé de l'écoulement (3.7) prend la forme

$$\forall \mathbf{x} : \quad \int_{-1}^{\xi} \vec{v}_1 \vec{j} dz + \int_{\xi}^1 \vec{v}_2 \vec{j} dz = 0. \quad (3.41)$$

Ici, comme dans le Paragraphe précédent, le saut de la grandeur à l'interface est désigné par des crochets, par exemple $[p] = p_1 - p_2$ et les paramètres adimensionnels suivants sont introduits:

- $A = ah^{-1}$
- $\Omega_\beta = h^2 \omega \nu_\beta^{-1}$
- $G_o = g / (h \omega^2)$
- $We = \rho_2 h^3 \omega^2 / \alpha$
- $\rho = \rho_2 / \rho_1$, $R_1 = \rho$ et $R_2 = 1$

Ainsi, en général, le problème comporte 6 paramètres adimensionnels: l'amplitude A , les deux fréquences Ω_β , le paramètre G_o , le nombre de Weber We et le rapport des densités ρ .

3.3.1 Écoulement principal et stabilité

Le problème (3.35) - (3.41) admet une solution simple, correspondant à l'interface plane $\xi = 0$ et à l'écoulement 2D fermé

$$\vec{V}_\beta = U_\beta(z) \vec{j} \exp(it) + C.C., \quad (3.42)$$

$$P_\beta = -G_o A^{-1} R_\beta^{-1} z + \mathbf{x}(Q \exp(it) + C.C.), \quad Q = \text{const.} \quad (3.43)$$

Les fonctions $U_\beta(z)$ peuvent être trouvées analytiquement, mais les expressions pour celles-ci sont trop encombrantes, c'est pourquoi elles ont été approximées par voie numérique. Sur la Fig. 3.7 on

présente les profils de la vitesse à quatre instants: (a) $t = 0$, (b) $t = \pi/2$, (c) $t = \pi$, (d) $t = 3\pi/2$. La direction de l'écoulement change à l'opposé lors du décalage d'une demi-période du forçage extérieur. Notons la présence de fines couches frontalières, des deux côtés de l'interface et près des murs rigides de la cavité (Figs. 3.7(a) et 3.7(c)).

Comme dans le cas du problème de stabilité avec approximation de fluide parfait, nous analyserons la stabilité de l'état principal par rapport à de petites perturbations 2D, périodiques en espace et en temps. Dans le cas où la fréquence adimensionnelle des vibrations est grande, les couches frontalières deviennent particulièrement fines, ce qui rend le problème de l'analyse numérique assez complexe.

Par linéarisation des équations près de la solution (3.42), (3.43), nous obtenons le problème suivant pour de petites perturbations \vec{u}_β et p_β des champs de vitesse et de pression:

$$\frac{\partial \vec{u}_\beta}{\partial t} + A(\vec{V}_\beta \nabla) \vec{u}_\beta + A(\vec{u}_\beta \nabla) \vec{V}_\beta = -R_\beta \nabla p_\beta + \Omega_\beta^{-1} \Delta \vec{u}_\beta, \quad (3.44)$$

$$\text{div } \vec{u}_\beta = 0. \quad (3.45)$$

Les conditions aux limites pour le système des équations (3.44), (3.45) ont la forme:

$$z = -1 : \quad \vec{u}_1 = 0; \quad z = 1 : \quad \vec{u}_2 = 0. \quad (3.46)$$

$$z = 0 : \quad A^{-1} \left(\frac{\rho - 1}{\rho} G_o \xi + W e^{-1} \Delta \xi \right) n_i + [p] n_i = (\Omega_1^{-1} \rho^{-1} \sigma_{ik}^{(1)} - \Omega_2^{-1} \sigma_{ik}^{(2)}) n_k, \quad (3.47)$$

$$[\vec{u}] = - \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right] \xi, \quad (3.48)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{V}_1 \nabla \xi = u_{1z}. \quad (3.49)$$

Comme conséquence de l'homogénéité du problème le long de l'axe x , nous nous limiterons à la considération des perturbations normales, proportionnelles à $\exp(ikx)$. Finalement, le problème de la stabilité linéaire entre les couches de liquides visqueux, immiscibles, prend la forme suivante:

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + ikAV_\beta u_\beta + w_\beta A \frac{\partial V_\beta}{\partial z} = -ikR_\beta p_\beta + \Omega_\beta^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) u_\beta, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial w_\beta}{\partial t} + ikAV_\beta w_\beta = -R_\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial z} + \Omega_\beta^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w_\beta, \quad (3.51)$$

$$iku_\beta + \frac{\partial w_\beta}{\partial z} = 0, \quad (3.52)$$

$$z = -1 : \quad u_1 = w_1 = 0; \quad z = 1 : \quad u_2 = w_2 = 0, \quad (3.53)$$

$$z = 0 : \quad A^{-1} \xi \left(\frac{\rho - 1}{\rho} G_o - W e^{-1} k^2 \right) + [p] + 2 \left(\Omega_2^{-1} \frac{\partial w_2}{\partial z} - \Omega_1^{-1} \rho^{-1} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.54)$$

$$- \frac{\Omega_2}{\Omega_1 \rho} \left(ikw_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z} + \xi \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} \right) + ikw_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z} + \xi \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = 0, \quad (3.55)$$

$$[u] = - \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right] \xi, \quad (3.56)$$

$$[w] = 0, \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \xi}{\partial t} + ikV_1 \xi = w_1. \quad (3.58)$$

Les perturbations arbitraires continues dans le temps peuvent être présentées, en utilisant le théorème de Fourier, sous forme d'une somme de modes simples sinusoidaux (en nombre infini, dans le cas général) avec des amplitudes et des fréquences cycliquement différentes. Nous approximerons les champs dépendant du temps par les segments finis d'une série de Fourier sous la forme

$$f_\beta(z, t) = \sum_{n=-\hat{N}}^{\hat{N}} f_{n\beta}(z) \exp(int), \quad (3.59)$$

où l'indice n peut avoir les valeurs entières (le cas synchrone), ainsi que demi-entières (le cas asynchrone). Ainsi, nous obtenons pour chaque couche un problème aux limites à deux points pour un système d'équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre pour les amplitudes $p_{n\beta}(z)$, $u_{n\beta}(z)$ et $w_{n\beta}(z)$ (nous remarquerons que les amplitudes $\xi_n(z)$ peuvent être éliminées des conditions aux limites (3.54) - (3.58)). L'ordre de ce système (pour le cas synchrone) est de $4N$ (voir l'ANNEXE B), N étant le nombre des termes synchrones de la série (3.59)).

Il est important de remarquer que dans les systèmes d'équations différentielles ordinaires obtenus, les harmoniques synchrones et asynchrones existent indépendamment les uns des autres. Du point de vue mathématique, c'est la conséquence du fait que l'état principal $V_\beta = U_\beta(z) \exp(it) + C.C.$ "déplace" l'indice n de ± 1 , c.à-d. les harmoniques synchrones passent aux synchrones, et asynchrones passent aux asynchrones. Ainsi, les problèmes aux limites correspondants peuvent être résolus indépendamment. Les solutions du problème aux limites pour des harmoniques synchrones ont la période du forçage extérieur, mais les solutions du problème aux limites pour des harmoniques asynchrones ont une période égale au double de la période du forçage extérieur.

La procédure de résolution numérique du problème spectral linéaire consiste en ce qui suit (ici nous décrivons brièvement l'application de cette procédure pour le problème donné; la description plus générale est présentée dans le Chapitre 4). Comme on le sait [40, 35], on peut toujours réduire le problème aux limites au problème de Cauchy. Pour obtenir la solution du problème aux limites, le système des équations différentielles ordinaires linéaires, pour chaque couche, doit être intégré $2N$ fois (dans le cas synchrone), depuis le mur rigide vers l'interface (située au milieu), chaque fois avec un vecteur de conditions initiales différent. Les vecteurs des conditions initiales doivent être choisis linéairement indépendants. Les solutions, obtenues après intégration, sont mises comme conditions à l'interface, en formant le déterminant caractéristique D , qui est une fonction du nombre d'onde k des perturbations et de l'amplitude adimensionnelle A des vibrations. La valeur $A = A_c$ quand D

est égal à zéro (pour k fixé) est critique pour la stabilité neutre. Ainsi, pour $N = 10$ (le choix d'un tel nombre de termes de la série de Fourier permet d'obtenir une précision suffisante du résultat), les 40 équations différentielles ordinaires doivent être intégrées $(2 * 10) * 2 = 40$ fois depuis la frontière vers l'interface pour obtenir la valeur de D , pour k et A fixés. Pour réduire D à zéro, pour $A = A_c$ et $k = k_c$, il faut répéter la procédure d'intégration le nombre de fois nécessaire.

3.3.2 Résultats des calculs numériques

L'algorithme mentionné ci-dessus a été "parallélisé" et les calculs ont été faits avec l'ordinateur *Parsytec Power Xplorer* à huit processeurs *Power PC 100 Mhz* parallèle, avec 8Mb de mémoire rapide, chacun. Pour les calculs on a utilisé jusqu'à 20 fonctions de base $f_n(z)$ pour chaque cas (synchrone et asynchrone). Nous remarquerons, cependant, que deux fois moins de fonctions de base suffisent déjà pour l'obtention d'une précision acceptable des calculs.

Sur la Fig. 3.8, sont présentés les courbes neutres qui partagent le plan (k, A) en domaines de stabilité et d'instabilité, nommés "languettes". Les paramètres adimensionnels sont choisis de la manière suivante: $\rho = 0.5$, $G_o = 0.16$ et $We = 6.25$. On trouve seulement les solutions synchrones. Cette situation n'est pas unique, l'absence de solutions asynchrones dans certains problèmes avec excitation paramétrique a été remarquée récemment en [16].

Les courbes asymptotiques "non visqueuses", obtenues en résolvant le problème (3.16), sont représentées par les lignes continues; les courbes numériques obtenues en résolvant le problème (3.50) - (3.58) pour diverses valeurs de la fréquence adimensionnelle $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ sont représentées par les lignes tiretées.

Pour les valeurs élevées du paramètre Ω (ce qui correspond aux petites viscosités) les points des minimums sur les courbes numériques sont proches des sommets des "languettes" paramétriques, ce qui signifie un petit seuil d'apparition de l'instabilité (Fig. 3.8(a)). En réduisant la fréquence (augmentation de la viscosité) le seuil de l'instabilité grandit (Fig. 3.8(b)). Ainsi, la viscosité exerce une influence faible sur l'instabilité de Kelvin - Helmholtz, mais supprime fortement l'instabilité paramétrique, liée à l'excitation des ondes capillaire - gravitationnelles. Ces résultats sont en accord qualitatif avec les résultats de l'analyse du modèle phénoménologique "visqueux" (§3.2.3). Nous remarquerons aussi, qu'à une certaine fréquence critique ($\Omega_c < 250$), la frontière du domaine de l'instabilité de Kelvin - Helmholtz adhère à la frontière de la zone résonnante (Fig. 3.8(b)), de sorte qu'aux plus petites fréquences on ne trouve qu'une seule courbe neutre pour chaque valeur de la fréquence. Cela signifie, que dans le cas des liquides visqueux, la différence entre l'instabilité paramétrique et non-paramétrique disparaît.

Les résultats obtenus à partir de l'analyse du modèle phénoménologique (la courbe en traits, correspondant aux valeurs de $\sigma = 0.3307$, $nu = 1$ et $We = 6.25$) et les résultats des calculs numériques

du problème complet (la courbe en continu, correspondant à la valeur de $\Omega = 360$, voir Fig.3.8(b) et description) sont présentés sur la Fig. 3.10. Le modèle phénoménologique donne un seuil de l'instabilité qui est sous-estimé de 4 fois par rapport à la valeur réelle. Il est intéressant de remarquer qu'une comparaison analogue du modèle et des équations complètes, faite en [15] pour le problème de la stabilité linéaire de l'interface soumis à un champ de vibrations verticales, a donné le résultat inverse, c.à-d. le modèle a prédit un seuil surévalué.

Sur la Fig. 3.9, on présente la dépendance du seuil de l'instabilité sur la première zone résonnante de la fréquence adimensionnelle. Avec une augmentation de la fréquence, l'amplitude critique diminue et la "languette" instable est déplacée vers le domaine des ondes courtes, en accord complet avec les résultats du problème "non visqueux".

3.4 Analyse faiblement non-linéaire de l'instabilité des ondes longues dans le cadre de l'approximation des hautes fréquences

Dans les paragraphes précédents de ce Chapitre, ont été étudiées en détail les structures périodiques à l'interface d'une paire de liquides immiscibles soumis à un champ de vibrations tangentielles de fréquence finie. Dans ce Paragraphe, dans le cadre de l'approximation à hautes fréquences et de la procédure de la "moyenne", on obtient une équation non linéaire, ayant la forme de la deuxième loi de Newton, pour l'amplitude de déformation de l'interface par rapport à l'état d'équilibre (plan). Il est montré que l'équation donnée a la classe des solutions solitaires (solitons).

Si la fréquence des vibrations est assez grande, de sorte que $\omega \gg \nu/L^2$, où L est la taille caractéristique des structures hydrodynamiques, ν est la viscosité cinématique du liquide, on peut mettre en relief dans toutes les variables la composante pulsatoire rapide et la partie lente, dont les temps caractéristiques de changements sont grands en comparaison avec ω^{-1} [44]. Ainsi, il y a une hiérarchie des temps, ce qui rend naturel l'application de la méthode des échelles multiples [48] lors de la mise en moyenne des équations et des conditions aux limites. L'amplitude des vibrations a est supposée petite, mais l'amplitude de la vitesse des vibrations $b = a\omega$ est finie.

Le problème linéaire de la stabilité de l'interface plane soumise à un champ de vibrations de hautes fréquences a été résolu en [44]. En [44], il est montré que pour des vibrations horizontales de la cavité, l'état quasi-stationnaire est possible quand il n'y a pas de mouvement moyen, mais l'interface (au milieu) fait de petites fluctuations (de l'ordre de l'amplitude des vibrations) près du relief immobile. Dans ce cas, on obtient les équations générales et les conditions aux limites à l'interface pour les vitesses pulsatoires et "moyennes". En [37], les effets non linéaires ont été étudiés, en particulier, le caractère de branchement du relief périodique pour les couches d'épaisseur finie.

L'état de quasi-équilibre est défini à partir du problème [44] (Ψ et Φ sont les fonctions de courant

pour les perturbations planes (2D)):

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Delta \Phi = 0, \quad (3.60)$$

$$z = -H_1 : \quad \Psi = 0; \quad z = H_2 : \quad \Phi = 0. \quad (3.61)$$

A l'interface $z = \xi(x)$, on satisfait les conditions suivantes:

$$\Psi - \Phi = \frac{(\rho - 1)(H_1 + H_2)}{\rho H_2 + H_1} \xi, \quad (3.62)$$

$$\rho(\Psi_z - \Psi_x \xi_x) = \Phi_z - \Phi_x \xi_x, \quad (3.63)$$

$$B \left[\frac{\rho(H_1 + H_2)}{\rho H_2 + H_1} \Psi_z + \frac{H_1 + H_2}{\rho H_2 + H_1} \Phi_z + \Psi_z \Phi_z + \Psi_x \Phi_x \right] - \xi + \frac{\xi_{xx}}{(1 + \xi_x^2)^{3/2}} = \text{const}, \quad (3.64)$$

$$\rho = \rho_1 / \rho_2, \quad B = \frac{a^2 \omega^2}{4} \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\alpha g} \right)^{1/2}.$$

Ici, comme unité de mesure de longueur on choisit la combinaison $[\alpha / (\rho_1 - \rho_2) g]^{1/2}$, on conserve les mêmes unités pour Ψ et Φ , l'indice inférieur de Ψ , Φ , ξ désigne la différentiation selon la variable correspondante. Dans le cas d'épaisseurs identiques des couches, $H_1 = H_2 = H$, les équations (3.60) - (3.64) se ramènent aux équations (2.6) - (2.7) de [44].

L'amplitude de la déformation $\xi(x)$ de l'interface de l'état d'équilibre plan est considérée comme une petite grandeur et nous rapportons les conditions aux limites à la surface non perturbée $\xi = 0$ avec une précision limitée aux termes linéaires. En fonction de l'idée principale de la méthode des échelles multiples nous introduisons la hiérarchie des longueurs

$$x_1 = \epsilon x, \quad x_2 = \epsilon^2 x, \quad x_3 = \epsilon^3 x, \dots$$

et nous trouvons que toutes les variables en (3.60) - (3.64) sont fonctions de ces longueurs. Ensuite, nous présentons la dérivée selon la coordonnée de n'importe quelle grandeur $f(x)$, aussi bien que les champs cherchés Ψ , Φ et que la fonction ξ , en séries

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \epsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \epsilon^3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots, & \Psi &= \Psi_2 \epsilon^2 + \Psi_4 \epsilon^4 + \dots, \\ \Phi &= \Phi_2 \epsilon^2 + \Phi_4 \epsilon^4 + \dots, & \xi &= \xi_2 \epsilon^2 + \xi_4 \epsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nous présentons le paramètre vibratoire B sous forme de $B = B_* + \epsilon^2 r$, où B_* est la valeur critique par rapport aux perturbations des ondes longues; r étant le paramètre super(sous)critique.

Les équations (3.60) - (3.64) donnent, aux ordres principaux en ϵ :

$$\Psi_2 = \frac{(\rho - 1)(H_1 + H_2)H_1}{(\rho H_2 + H_1)^2} \xi_2 \left(1 + \frac{z}{H_1} \right), \quad \Phi_2 = \frac{\rho(1 - \rho)(H_1 + H_2)H_2}{(\rho H_2 + H_1)^2} \xi_2 \left(1 - \frac{z}{H_2} \right), \quad (3.66)$$

$$B_* = \frac{(\rho H_2 + H_1)^3}{2\rho(\rho - 1)(H_1 + H_2)^2}. \quad (3.67)$$

A partir de (3.67), nous remarquons que, dans le cas de couches d'épaisseurs identiques, on obtient le résultat connu pour le seuil de l'instabilité [44]:

$$B_* = \frac{H(\rho + 1)^3}{8\rho(\rho - 1)}.$$

A l'ordre suivant en ϵ , nous avons (en omettant l'indice 2 pour ξ_2)

$$\Psi_4 = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4, \quad \Phi_4 = C_5 z^3 + C_6 z^2 + C_7 z + C_8, \quad (3.68)$$

$$\xi'' \left(1 - \frac{H_1^3 + \rho H_2^3}{3(\rho H_2 + H_1)} \right) + \frac{2\rho(\rho - 1)(H_1 + H_2)^2}{(\rho H_2 + H_1)^3} r \xi + \frac{3(\rho - 1)}{\rho H_2 + H_1} \xi^2 = C, \quad C = \text{const.} \quad (3.69)$$

Ici, $C_1 - C_8$ sont les fonctions connues de $\rho, H_1, H_2, \xi(x)$; et le signe " désigne la double différentiation en x .

En [44], il était montré que, pour les couches fines ($H^2 < 3$) d'épaisseur identique H , les perturbations des ondes longues sont les plus dangereuses. Dans les couches d'épaisseur différente, les perturbations des ondes longues sont plus dangereuses pour $(H_1^3 + \rho H_2^3)/(\rho H_2 + H_1) < 3$. Nous aurons en vue ce cas par la suite. En outre nous nous intéresserons seulement aux solutions de l'équation (3.69) qui sont à zéro en permanence, c.à-d. des solutions pour lesquelles $C = 0$. L'équation (3.69) peut se réduire à la forme de la deuxième loi de Newton

$$\xi'' = -dU/d\xi, \quad U = \frac{1}{2}ar\xi^2 + \frac{1}{3}b\xi^3, \quad a(\rho, H_1, H_2) > 0, \quad b(\rho, H_1, H_2) > 0. \quad (3.70)$$

La dépendance de $U(\xi)$ pour différentes valeurs négatives de r est présentée sur la Fig. 3.11 ($r = -0.4, -0.6, -0.75$).

Au niveau nul de l'énergie correspond la déformation de l'interface sous forme d'un soliton immobile (Fig. 3.12). Son amplitude, d'après (3.70), est donnée par l'expression

$$\xi_m = \frac{3}{2} \frac{a}{b} |r|.$$

Puisque les valeurs $r < 0$ correspondent au domaine souscritique, le soliton est stable, ce qui permet de compter sur sa détection dans les expériences. Nous remarquerons que, hormis les solutions de type solitaire dans l'espace des paramètres, se trouvent les solutions périodiques correspondant aux énergies $E < 0$. Ces solutions ont été étudiées en détail en [44] et [37].

C'est une place pour la figure f32-35

C'est une place pour la figure f36

C'est une place pour la figure f37

C'est une place pour la figure f38-39

C'est une place pour la figure f310

C'est une place pour la figure f311-312

3.5 Conclusion

On montre que, dans le cas des fluides parfaits, le problème de la stabilité linéaire, notamment des perturbations planes (2D), est réduit à l'analyse de l'équation de type Mathieu. Ainsi, les vibrations tangentielles entraînent l'instabilité de l'interface, liée à l'instabilité de Kelvin - Helmholtz à la frontière entre deux écoulements de sens inverse, non stationnaires, ainsi qu'à l'intensification paramétrique des ondes à l'interface. Dans le cas limite de viscosité nulle, le premier type d'instabilité est caractérisé par le seuil fini de l'amplitude de l'excitation, tandis que pour l'instabilité paramétrique il n'y a pas de seuil. Cependant, pour les hautes fréquences, l'instabilité paramétrique a lieu dans un intervalle étroit des nombres d'onde et, par conséquent, elle est très sensible à l'amortissement visqueux. En outre, dans le cas considéré, les vibrations à hautes fréquences peuvent entraîner la déformation de l'interface sous forme d'un soliton immobile.

Dans le cas des liquides visqueux la différence entre l'instabilité paramétrique et nonparamétrique disparaît. Les résultats de l'analyse du modèle phénoménologique "visqueux" sont en accord qualitatif avec les résultats de l'analyse du modèle complet.

CHAPITRE 4

PROBLÈMES AUX LIMITES ET À CONDITIONS INITIALES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES

Dans le Chapitre 3 (§3.3), on abordait déjà certaines questions liées à la résolution numérique des problèmes aux limites et à conditions initiales. Dans ce Chapitre, ce problème est élucidé plus en détail. Dans la Section 4.1, on cite la description de la méthode numérique, sur la base du modèle utilisé pour le problème du §2.3. La Section 4.2 est consacrée à la procédure de réalisation de la méthode susmentionnée, sur un ordinateur avec processeurs parallèles.

4.1 Méthode de réduction du problème aux limites au problème de Cauchy

Le problème aux limites examiné pour les perturbations neutres de l'état de quasi-équilibre a la forme suivante (voir page 35):

$$u_{zzz} = \frac{1}{2}ABC\psi_z + \frac{1}{4\rho_0}ABC^2S + 2k^2u_z + A(k^2u + Aw) - k^2w - G_d S\rho_0, \quad (4.1)$$

$$w_z = k^2u + Aw, \quad (4.2)$$

$$S_{zz} = k^2S - Aw, \quad (4.3)$$

$$\psi_{zz} = k^2\psi + A\psi_z - CS_z/\rho_0, \quad (4.4)$$

$$z = 0, \quad 1 : \quad u = w = \psi = S_z = 0. \quad (4.5)$$

Ici, $u(z), w(z)$ sont les amplitudes du champ plan des perturbations de la vitesse moyenne, $\psi(z)$ est l'amplitude de la fonction de courant du champ des perturbations de la vitesse pulsatoire, $S(z)$ est le logarithme naturel du champ des perturbations de la densité moyenne, $\rho_0(z)$ est la densité moyenne, k est le nombre d'onde des perturbations le long de l'axe x , B est le paramètre vibratoire, $G_d = Ga P_d$ (où, Ga est le nombre de Galilée, P_d est le nombre de Prandtl diffusif), A et C sont des constantes.

Le problème aux limites (4.1) - (4.5) est caractéristique: la solution non triviale existe seulement pour des valeurs définies du paramètre spectral k . Les nombres d'onde k des perturbations se trouvent comme les valeurs propres du problème aux limites; les fonctions propres correspondantes u, w, S définissent la structure des perturbations caractéristiques des vitesses moyennes et pulsatoires et de la densité. Les valeurs propres k dépendent des paramètres B et G_d .

En suivant [35], nous exposerons ici la méthode de réduction du problème aux limites au problème de Cauchy.

En introduisant les notations

$$y_1 = u, \quad y_2 = w, \quad y_3 = \psi, \quad y_4 = S_z, \quad y_5 = u_z, \quad y_6 = u_{zz}, \quad y_7 = \psi_z, \quad y_8 = S \quad (4.6)$$

nous écrivons le système initial du huitième ordre (4.1) - (4.5) sous forme du système de huit équations du premier ordre:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_5, & y_2' &= k^2 y_1 + A y_2, & y_3' &= y_7, & y_4' &= k^2 y_8 - A y_2, \\ y_5' &= y_6, & y_6' &= \frac{1}{2} ABC y_7 + \frac{1}{4 \rho_0} ABC^2 y_8 + 2k^2 y_5 + A(k^2 y_1 + A y_2) - k^2 y_2 - Ga \rho_0 y_8, \\ y_7' &= k^2 y_3 + A y_7 - C y_4 / \rho_0, & y_8' &= y_4. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour la position du problème aux conditions initiales du côté gauche du domaine d'intégration $z = 0$, on doit poser huit conditions pour les fonctions y_i . Quatre d'entre elles sont définies par les conditions aux limites du problème:

$$z = 0 : \quad y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.8)$$

Les quatre conditions manquantes doivent être transférées du côté droit du domaine $z = 1$. Suivant la technique standard de réduction au problème d'un point, nous examinerons les quatre solutions particulières linéairement indépendantes du système (4.7), qui satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad y_1^{(1)} &= y_2^{(1)} = y_3^{(1)} = y_4^{(1)} = y_5^{(1)} = y_6^{(1)} = y_7^{(1)} = 0, & y_8^{(1)} &= 1; \\ y_1^{(2)} &= y_2^{(2)} = y_3^{(2)} = y_4^{(2)} = y_5^{(2)} = y_6^{(2)} = y_8^{(2)} = 0, & y_7^{(2)} &= 1; \end{aligned}$$

$$y_1^{(3)} = y_2^{(3)} = y_3^{(3)} = y_4^{(3)} = y_5^{(3)} = y_7^{(3)} = y_8^{(3)} = 0, \quad y_6^{(3)} = 1; \quad (4.9)$$

$$y_1^{(4)} = y_2^{(4)} = y_3^{(4)} = y_4^{(4)} = y_6^{(4)} = y_7^{(4)} = y_8^{(4)} = 0, \quad y_5^{(4)} = 1.$$

Ici, l'indice supérieur indique le numéro de la solution particulière. A l'aide de ces solutions particulières on peut construire une solution générale, satisfaisant toutes les conditions aux limites sur le côté gauche du domaine:

$$y_i(z) = C_1 y_i^{(1)}(z) + C_2 y_i^{(2)}(z) + C_3 y_i^{(3)}(z) + C_4 y_i^{(4)}(z), \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.10)$$

Les constantes C_1, C_2, C_3, C_4 sont définies à partir des conditions aux limites sur le côté droit du domaine d'intégration:

$$z = 1 : y_1 = y_2 = y_3 = y_4. \quad (4.11)$$

De là, on obtient le système de quatre équations algébriques homogènes pour les coefficients:

$$C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} + C_3 y_i^{(3)} + C_4 y_i^{(4)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.12)$$

La condition d'existence de la solution non triviale du système (4.12) consiste à évaluer son déterminant à zéro; nous écrivons cette condition en revenant aux notations initiales des fonctions (voir 4.6):

$$D \equiv \begin{vmatrix} u^{(1)}(1) & u^{(2)}(1) & u^{(3)}(1) & u^{(4)}(1) \\ w^{(1)}(1) & w^{(2)}(1) & w^{(3)}(1) & w^{(4)}(1) \\ \psi^{(1)}(1) & \psi^{(2)}(1) & \psi^{(3)}(1) & \psi^{(4)}(1) \\ S_z^{(1)}(1) & S_z^{(2)}(1) & S_z^{(3)}(1) & S_z^{(4)}(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

Le déterminant D dépend des paramètres du problème B, G_d, A, C, k . L'équation caractéristique (4.13): $D(B, G_d, A, C, k) = 0$, définit le spectre des nombres d'onde k .

Ainsi, pour la définition du spectre des nombres d'onde (et, par conséquent, de toutes les caractéristiques de la stabilité linéaire), il faut construire les quatre solutions linéairement indépendantes satisfaisant aux conditions (4.9), et calculer à la précision suffisante les éléments du déterminant D . L'intégration des équations (4.7) est faite par voie numérique; C'est le moment de se servir, par exemple, de la méthode de prédicteur - correcteur d'Adams [50], qui est dans la plupart des cas plus efficace que la méthode de Runge - Kutta. Nous avons utilisé le programme LSODA [19] de la collection des programmes mathématiques ODEPACK [7].

Au cours de l'intégration des systèmes du type (4.7), il peut y avoir des difficultés, liées à la présence des petits paramètres aux dérivées principales. Parmi les solutions, peuvent apparaître les solutions oscillatoires et à croissance rapide. Les conditions initiales (4.9) assurent l'indépendance linéaire des quatre solutions particulières seulement à l'étape initiale de l'intégration. Par la suite,

cependant, à cause de la présence de la solution à croissance rapide et des erreurs d'arrondis, l'indépendance linéaire des solutions particulières se perd - elles deviennent proches, indépendamment des conditions initiales appliquées sur le côté gauche. Cela amène à ce que le système (4.12) devient mal conditionné et la condition (4.13) ne permet pas de définir les nombres d'onde caractéristiques.

Pour éliminer de telles difficultés Godunov [36] a proposé la méthode d'orthogonalisation. L'essence de la méthode est de faire des arrêts, en cours d'intégration (par exemple, à chaque pas), pour rétablir l'indépendance linéaire des solutions. Nous exposerons ici cette procédure, suivant [31].

Supposons qu'à un certain pas d'intégration nous obtenions les quatre solutions $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, y_i^{(3)}, y_i^{(4)}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Nous construirons les quatre combinaisons linéaires de ces solutions

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i^{(1)} &= a_1^{(1)} y_i^{(1)} + a_2^{(1)} y_i^{(2)} + a_3^{(1)} y_i^{(3)} + a_4^{(1)} y_i^{(4)}, \\ \tilde{y}_i^{(2)} &= a_1^{(2)} y_i^{(1)} + a_2^{(2)} y_i^{(2)} + a_3^{(2)} y_i^{(3)} + a_4^{(2)} y_i^{(4)}, \\ \tilde{y}_i^{(3)} &= a_1^{(3)} y_i^{(1)} + a_2^{(3)} y_i^{(2)} + a_3^{(3)} y_i^{(3)} + a_4^{(3)} y_i^{(4)}, \\ \tilde{y}_i^{(4)} &= a_1^{(4)} y_i^{(1)} + a_2^{(4)} y_i^{(2)} + a_3^{(4)} y_i^{(3)} + a_4^{(4)} y_i^{(4)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 8).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Nous demanderons, que les fonctions transformées

$$(\tilde{u}^{(1)'}, \tilde{u}^{(1)''}, \tilde{\psi}^{(1)'}, \tilde{S}^{(1)}), \quad (\tilde{u}^{(2)'}, \tilde{u}^{(2)''}, \tilde{\psi}^{(2)'}, \tilde{S}^{(2)}), \quad (\tilde{u}^{(3)'}, \tilde{u}^{(3)''}, \tilde{\psi}^{(3)'}, \tilde{S}^{(3)}), \quad (\tilde{u}^{(4)'}, \tilde{u}^{(4)''}, \tilde{\psi}^{(4)'}, \tilde{S}^{(4)})$$

aient les mêmes valeurs, au nouveau point, que les fonctions initiales au point de départ de l'intégration $z = 0$, c.à-d.

$$\begin{aligned}\tilde{y}_5^{(j)} &= a_1^{(j)} y_5^{(1)} + a_2^{(j)} y_5^{(2)} + a_3^{(j)} y_5^{(3)} + a_4^{(j)} y_5^{(4)} = \delta_{j1}, \\ \tilde{y}_6^{(j)} &= a_1^{(j)} y_6^{(1)} + a_2^{(j)} y_6^{(2)} + a_3^{(j)} y_6^{(3)} + a_4^{(j)} y_6^{(4)} = \delta_{j2}, \\ \tilde{y}_7^{(j)} &= a_1^{(j)} y_7^{(1)} + a_2^{(j)} y_7^{(2)} + a_3^{(j)} y_7^{(3)} + a_4^{(j)} y_7^{(4)} = \delta_{j3}, \\ \tilde{y}_8^{(j)} &= a_1^{(j)} y_8^{(1)} + a_2^{(j)} y_8^{(2)} + a_3^{(j)} y_8^{(3)} + a_4^{(j)} y_8^{(4)} = \delta_{j4}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Ici, j est le numéro de la solution particulière transformée ($j = 1, 2, 3, 4$), δ_{ji} est le symbole de Kroneker. A partir du système algébrique hétérogène (4.15) on trouve les coefficients $a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)}, a_4^{(j)}$ pour chacune des quatre solutions transformées. Les fonctions $\tilde{y}_5^{(j)}, \tilde{y}_6^{(j)}, \tilde{y}_7^{(j)}, \tilde{y}_8^{(j)}$ définissent les conditions initiales pour la continuation de la solution au pas suivant; les conditions initiales pour $\tilde{y}_1^{(j)}, \tilde{y}_2^{(j)}, \tilde{y}_3^{(j)}, \tilde{y}_4^{(j)}$ sont calculées à l'aide des rapports (4.14). Lors de cette procédure on réussit à garder l'indépendance linéaire des solutions jusqu'au point final du domaine d'intégration. Si on considère les fonctions $y_5^{(j)}, y_6^{(j)}, y_7^{(j)}, y_8^{(j)}$ comme les composants de quatre vecteurs, on peut dire que la procédure consiste à maintenir l'orthogonalisation de ces vecteurs.

Les transformations linéaires, faites lors de l'orthogonalisation, changent la contribution de chaque solution particulière à la solution générale (4.10) ce qui, cependant, n'influencé pas les valeurs propres du problème spectral.

4.2 Procédure de résolution numérique du problème spectral aux limites sur un ordinateur aux processeurs parallèles

A la base de la procédure présentée, se trouve la circonstance que les quatre intégrations nécessaires pour une valeur du déterminant caractéristique du système (4.7) peuvent être faites indépendamment¹; chaque intégration étant faite avec un des quatre vecteurs (4.9) comme condition initiale.

La variante la plus simple de "parallélisation" de l'algorithme, donnée sur deux processeurs, aura la forme suivante (nous admettons, qu'il ne faut pas faire l'orthogonalisation des solutions lors de l'intégration)²

1. L'utilisateur "emprunte" deux processeurs, par exemple le 1 et le 2, l'un d'eux (nous dirons, le 1) est désigné "Maître" et l'autre "Esclave", puis on établit une liaison bilatérale (*link*) entre eux. Tout cela se réalise par programme.
2. Le "Maître" lit le fichier des paramètres du problème et renvoie leur copie (ainsi que les numéros 3 et 4 des vecteurs des conditions initiales) sur l'"Esclave".
3. Après réception de ces données l'"Esclave" intègre successivement les équations (4.7) avec les conditions initiales 3, 4 de (4.9). Pendant ce temps, le "Maître" intègre successivement les équations (4.7) avec les conditions initiales 1, 2 de (4.9).
4. Après l'achèvement de l'intégration au point $z = 1$ l'"Esclave" renvoie "ses" solutions sur le "Maître", où le déterminant caractéristique est calculé.
5. Un des paramètres du problème (par exemple, le nombre d'onde) change de manière à satisfaire la condition $D = 0$ avec la plus grande précision (on peut utiliser, par exemple, le schéma de dichotomie), et cette nouvelle valeur est transmise à l'"Esclave".
6. Les points 3 - 5 de l'algorithme se répètent jusqu'à la réalisation de la condition $D = 0$.

Puisque la quantité d'échanges d'information entre les processeurs (ainsi que le taille du message en octets) est très minime, il est évident que l'algorithme parallèle pour les deux processeurs cité

¹Dans ce Paragraphe, la plupart des termes est citée en langues française et anglaise

²On a aussi en vue, que le programme est écrit pour l'ordinateur parallèle du type "Ordinateur à mémoire distribuée, ou *Distributed Memory Computer*". La particularité des ordinateurs de ce type est que l'échange d'information entre les processeurs (chacun d'eux ayant un bloc particulier de mémoire) se réalise par l'envoi dirigé du message, à la différence de "L'ordinateur à mémoire partagée, ou *Shared Memory Computer*", où l'échange passe par le domaine de mémoire commun à tous les processeurs (Fig. 4.1,2) [18]. Puisque la vitesse de transmission des données sur les *liens (links)* de "L'ordinateur à mémoire distribuée" est beaucoup moins grande que la vitesse de transmission des données sur le (*bus*) de "L'ordinateur à mémoire commune", les stratégies de programmation se distinguent aussi. Si le processeur est capable d'accomplir une grande quantité de calculs pendant le temps nécessaire pour l'envoi de l'information, il faut construire l'algorithme de telle manière qu'on puisse accomplir le plus grand volume des calculs entre les échanges.

ci-dessus sera, en comparaison avec l'algorithme ordinaire "séquentiel" sur un processeur, environ deux fois plus efficace. La définition stricte de l'efficacité (*Speedup*) de l'algorithme parallèle est donnée de la manière suivante [18]. Soit T_1 le temps d'exécution du programme "séquentiel" sur un processeur, et T_m le temps d'exécution de la variante "parallèle" du même programme sur m processeurs. On définira l'efficacité de l'algorithme parallèle par le rapport $S = T_1/T_m$. Pour notre exemple l'efficacité mesurée est voisine de 1.9.

La nécessité de faire l'orthogonalisation des solutions complique, de façon essentielle, la procédure de résolution du problème et réduit l'efficacité (essentiellement parce que la quantité d'échanges d'information entre les processeurs augmente, ainsi que la taille de chaque message). En effet, pour faire l'orthogonalisation de quatre solutions en un certain point intermédiaire du segment d'intégration, il est nécessaire (a) d'envoyer deux jeux de données (REAL*8) des solutions de l'"Esclave" au "Maître", (b) de faire l'orthogonalisation et (c) de renvoyer toutes les deux solutions orthogonalisées à l'"Esclave", et pendant l'orthogonalisation l'"Esclave" se trouve en attente, ce qui est la conséquence du "synchronisme" du mode d'envoi/réception de l'information. Chaque orthogonalisation, faite ainsi, réduit l'efficacité de la procédure parallèle de 0.5%. Il faut remarquer, cependant, qu'ordinairement il n'y a pas de nécessité de faire l'orthogonalisation à chaque pas d'intégration à travers la couche, il suffit de faire une orthogonalisation tous les 100 pas, environ.

Ainsi, pour augmenter l'efficacité, il faut modifier l'algorithme d'orthogonalisation, pour avoir la possibilité de diminuer le nombre des échanges et la taille des messages. L'algorithme, décrit au Paragraphe précédent, est assez difficile à "paralléliser", mais par contre c'est facile à faire avec le schéma de Gram - Schmidt [52]. Nous aurons en vue le système de 16 équations différentielles ordinaires du premier ordre avec les 8 assortiments de conditions initiales. Une variante "parallèle" du schéma de Gram - Schmidt pour $m = 4$ processeurs, reliés logiquement en anneau, est la suivante: le processeur 1 fait l'orthogonalisation de "ses" deux vecteurs des solutions, les envoie au processeur 2 et continue l'intégration en direction du point intermédiaire suivant; le processeur 2 fait l'orthogonalisation des quatre vecteurs, les envoie au processeur 3 et continue l'intégration et ainsi de suite (avec la taille de message qui augmente toujours). A l'acquisition du point intermédiaire suivant, se passe le réarrangement cyclique des numéros logiques des processeurs et la procédure se répète.

On peut aussi augmenter l'efficacité en utilisant l'échange d'information "asynchrone". On peut expliquer les différences entre les modes "synchrones" et "asynchrones" de transmission des données entre les processeurs par l'exemple suivant ³.

Examinons le cas d'"un écrivain" et d'"un lecteur", où l'écrivain veut envoyer un bloc de données au lecteur. Pour ce faire, ils utilisent les commandes SEND ("envoi") et RECV ("réception") ⁴. Pour

³O.Bessonov, correspondance privée.

⁴Les commandes SEND, RECV, ASEND, ARECV sont les fonctions système de l'ordinateur *Parsytec Power*

la variante synchrone, les calculs des programmes seront arrêtés tant que l'échange n'aura pas lieu effectivement. En réalité, il peut se trouver que l'un d'eux ait donné la commande avant l'autre; alors, celui-ci reste "en suspens" plus longtemps.

Ce régime est justifié, si, par exemple, les données lues sont nécessaires au lecteur juste après l'achèvement de l'envoi. Mais il peut se trouver que l'algorithme est organisé de telle manière que les données ne seront pas nécessaires tout de suite, mais la commande est donnée d'avance (ce qui est préférable). Dans ce cas il est inutile de perdre le temps pour l'attente et il vaut mieux continuer les calculs. C'est pourquoi la commande ARECV est organisée de telle manière qu'elle lance seulement la transmission de données à l'appareil (plus exactement, prépare tout ce qu'il faut pour l'équipement et le système opérationnel) et rend la gestion. Certainement, après cela le contenu du "paquet de données" lu à chaque instant peut être n'importe lequel, et on ne peut pas s'en servir. A un moment donné, quand l'algorithme aura besoin enfin du contenu de ce "paquet de données", on doit passer la commande WAIT (fr. "attendre"), qui arrêtera le programme, tant que les données ne viendront pas. En un mot, les commandes ARECV et WAIT, placées une après l'autre, sont équivalentes à une commande synchrone RECV. Certainement, si au moment de l'annonce de la commande WAIT toutes les données sont déjà venues, il n'y aura aucune interruption des calculs.

Cela se passe de la même manière pour les commandes d'envoi SEND et ASEND. Mais ici il y a une particularité: puisque la destination de la commande de l'envoi - envoyer et "oublier", il est inutile d'attendre la fin de la transmission. C'est pourquoi il peut arriver que la commande SEND est organisée soit-disant de manière asynchrone, sauf qu'elle n'a pas besoin de la commande WAIT. Mais il est possible (dans le cas concret), que la commande SEND envoie les données directement à partir du "paquet de données" de l'utilisateur, c.à-d. ne le copie pas dans une mémoire tampon intermédiaire. Dans ce cas la commande SEND sera organisée réellement de manière synchrone, et l'utilisation de la paire asynchrone ASEND et WAIT sera justifiée.

De toute façon le choix de cette variante ou de l'autre doit être défini par les besoins et les propriétés de l'algorithme. Il est assez difficile de donner d'avance des recommandations précises.

Les résultats des mesures de l'efficacité de l'algorithme de résolution du problème spectral de la stabilité de l'interface plane entre deux liquides visqueux immiscibles, parallélisé avec différents nombres de processeurs (§3.3) sont présentés sur les Tableaux 1, 2.

Table 1. Mode d'échange "synchrone"

Xplorer [17]. La syntaxe des commandes peut se distinguer sur les différentes plate-formes.

m	<i>S</i>
2	1.89
4	3.33
8	6.06

Table 2. Mode d'échange "asynchrone"

m	<i>S</i>
2	1.91
4	3.60
8	6.72

C'est une place pour la figure f41-42

CHAPITRE 5

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans ce travail a été étudiée la stabilité des écoulements 2D d'un liquide fermé, stratifié en densité, soumis à un champ vibratoire polarisé linéairement, avec l'axe des vibrations dirigé perpendiculairement au gradient de densité. Les problèmes de stabilité formulés ont été analysés théoriquement et numériquement, en utilisant une série de méthodes théoriques et pratiques de la stabilité hydrodynamique. Plusieurs types d'instabilité vibratoire ont été observés, dans un système liquide continûment stratifié et dans un système bicouche de liquides immiscibles.

1. On a découvert que les vibrations horizontales progressives du récipient, contenant un mélange fortement stratifié, amènent l'apparition de plusieurs niveaux d'instabilité aux ondes courtes, avec le seuil fini, en l'absence de dissipation. Hormis l'instabilité de ce type, a lieu l'instabilité paramétrique, liée au pompage résonnant de l'énergie (forçage extérieur) dans les ondes internes gravitationnelles. Ce type d'instabilité est caractérisé par le seuil nul de l'excitation en absence de dissipation, et a lieu pour des intervalles étroits des nombres d'onde. Cependant, l'insertion du mécanisme dissipatif, par exemple de la diffusion moléculaire et de la viscosité, permet de stabiliser l'instabilité des ondes courtes. Plus dangereuses deviennent les perturbations avec longueur d'onde finie. La réduction de l'intensité de la diffusion amène l'augmentation du seuil de stabilité et la réduction de la longueur d'onde de la perturbation la plus dangereuse.
2. Lors du passage de la stratification continue à discontinue, c'est-à-dire, lors du remplacement du liquide continûment stratifié par le système de deux liquides immiscibles avec densités peu différentes, il y a nécessité de prendre en considération les effets liés à la présence de la tension superficielle à l'interface entre les couches liquides. On montre que dans le cas de fluides parfaits, le problème de la stabilité linéaire par rapport aux perturbations planes (2D) est réduit à l'analyse d'une équation de type Mathieu. Les vibrations tangentielles induisent l'instabilité

de l'interface, liée à l'instabilité de Kelvin - Helmholtz à la frontière de deux écoulements de sens opposés, non stationnaires, ainsi qu'à l'excitation paramétrique des ondes à l'interface. Le premier type d'instabilité est caractérisé par le seuil fini de l'amplitude d'excitation, tandis que pour l'instabilité paramétrique il n'y a pas de seuil. Cependant, pour les fréquences des vibrations assez hautes, l'instabilité paramétrique a lieu dans un intervalle étroit des nombres d'onde et, en conséquence, elle est très sensible à l'amortissement visqueux. En outre, l'analyse du mode des ondes longues d'instabilité interfaciale permet de déduire que les vibrations à hautes fréquences peuvent provoquer la déformation de l'interface sous forme d'un soliton immobile. Dans le cas de liquides visqueux, la différence entre l'instabilité paramétrique et non-paramétrique disparaît.

3. On propose un algorithme numérique efficace pour la solution des problèmes linéaires spectraux de l'instabilité hydrodynamique sur les ordinateurs puissants avec processeurs parallèles. L'application de la procédure donnée permet de réduire le temps machine pour un problème concret, par rapport au régime monoprocesseur (environ deux fois, pour un calcul sur deux processeurs).

Perspectives

Un gros travail d'analyse et de simulation numérique a été effectué pour étudier la stabilité vibratoire des systèmes hydrodynamiques hétérogènes mentionnés ci-dessus. Il pourra servir de guide pour l'interprétation des expériences spatiales réalisées par l'équipe de N. K. Bezdeneznykh (Perm University).

La plupart des modèles mathématiques utilisés jusqu'à maintenant sont établis sur la base de plusieurs hypothèses simplificatrices; en particulier, nous nous servons largement de l'approche des vibrations hautes fréquences, du modèle de fluide parfait, de l'absence de diffusion moléculaire, d'une interface entre liquides immiscibles, etc.

Cette étude n'est qu'une étape; elle devra être poursuivie par les études (a) de l'influence vibratoire sur un mélange liquide des trois composants et plus, avec équation d'état plus complexe, géométrie plus complexe (b) de l'influence vibratoire sur une configuration de géométrie cylindrique et axisymétrique comportant une couche liquide encapsulante annulaire.

ANNEXE A

Problème aux limites pour l'équation (2.20) en terme de variables de Lagrange

Les dérivées secondes des composantes de Fourier $W_{(-1)}$, $W_{(1)}$ sont définies à partir du système d'équations algébriques (où l'indice supérieur ' désigne la différentiation selon la coordonnée z):

$$A_{11}W''_{(-1)} + A_{12}W''_{(1)} = B_1$$

$$A_{21}W''_{(-1)} + A_{22}W''_{(1)} = B_2$$

où les coefficients et les parties de droites sont données ci-dessous (l'indice supérieur * désignant la conjugaison complexe) :

$$A_{11} = \alpha_2\alpha_3/\alpha_1 - \rho_0/\alpha_4, \quad A_{12} = \alpha_2\alpha_3^*/\alpha_1,$$

$$A_{21} = \alpha_2^*\alpha_3/\alpha_1, \quad A_{22} = \alpha_2^*\alpha_3^*/\alpha_1 + \rho_0/\alpha_4,$$

$$\begin{aligned} B_1 = & ((-2\alpha_4V_0'V_0^{*'} - \alpha_6)\rho_0 + \rho_0'(2\alpha_4V_0V_0^{*'} - \alpha_7 + \beta_5(V_0^{*'} - V_0'))W_{(-1)} + \\ & W_{(1)}\rho_0'/\alpha_4 + 0.5\rho_0'V_0'W_{(-3)} + ((0.5V_0 + \beta_6)\rho_0' - 2\rho_0V_0')W_{(3)} + \\ & (\alpha_4\rho_0V_0'^2 - \rho_0'V_0'(4\alpha_4V_0/3 + \beta_7))W_{(-5)} + V_0^{*'}(\alpha_4\rho_0V_0^{*'} + \\ & 2\alpha_4\rho_0'V_0^* - \beta_5\rho_0')W_{(-2)} - \beta_8V_0^{*'}R_{(0)} - (\alpha_8 + \beta_8V_0^*)\hat{R}'_{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & ((2\alpha_4V_0'V_0^{*'} + \alpha_6)\rho_0 + \rho_0'(-2\alpha_4V_0^*V_0' + \alpha_7 - \beta_5(V_0^{*'} - V_0'))W_{(-2)} - \\ & W_{(2)}\rho_0'/\alpha_4 + 0.5\rho_0'V_0^{*'}W_{(-4)} + ((0.5V_0^* - \beta_6)\rho_0' - 2\rho_0V_0^{*'})W_{(4)} + \\ & (-\alpha_4\rho_0V_0^{*'}^2 + \rho_0'V_0^{*'}(4\alpha_4V_0^*/3 - \beta_7))W_{(-6)} + V_0'(-\alpha_4\rho_0V_0' - \\ & 2\alpha_4\rho_0'V_0 - \beta_5\rho_0')W_{(-1)} + \beta_8V_0'R_{(0)} - (\alpha_8 - \beta_8V_0)\hat{R}'_{(0)}, \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \beta_3 + \alpha_5(V_0^{*'} - V_0') - \beta_4(V_0V_0^{*'} + V_0^*V_0'),$$

$$\alpha_2 = \alpha_8 + \beta_8V_0^*, \quad \alpha_3 = (V_0 + \beta_1)\rho_0',$$

$$\alpha_4 = k/\omega, \quad \alpha_5 = 0.5kaw, \quad \alpha_6 = k\omega,$$

$$\alpha_7 = kg/\omega, \quad \alpha_8 = 0.5a\omega^2, \quad \alpha_9 = \omega^2, \quad \alpha_{10} = 0.5a\omega,$$

$$\beta_1 = 0.5ia\omega, \quad \beta_2 = 0.25ika, \quad \beta_3 = igk,$$

$$\beta_4 = ik, \quad \beta_5 = 0.5ika, \quad \beta_6 = 0.25ia\omega,$$

$$\beta_7 = ika/6, \quad \beta_8 = i\omega, \quad \beta_9 = ia\omega/6,$$

$$\beta_{10} = ika/8, \quad \beta_{11} = ig,$$

$$\begin{aligned} R_{(0)} = & [(\rho_0 V_0'' + 2\rho_0' V_0') W_{(-1)} + (V_0 + \beta_1) \rho_0' W_{(1)} + \\ & \rho_0' V_0' (-1.5\alpha_4 V_0 - \beta_2) W_{(-3)} + (\rho_0 V_0^{*''} + 2\rho_0' V_0^{*'}) W_{(-2)} + \\ & \rho_0' (V_0^* - \beta_1) W_{(2)} + \rho_0' V_0^{*'} (1.5\alpha_4 V_0^* - \beta_2) W_{(-4)}] / \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}'_{(0)} = & [(3\rho_0' V_0'' + \rho_0 V_0''') W_{(-1)} + (\rho_0 V_0'' + 3\rho_0' V_0') W_{(1)} + \\ & (-1.5\alpha_4 \rho_0' (V_0'^2 + V_0 V_0'') - \beta_2 \rho_0' V_0'') W_{(-3)} + \rho_0' V_0' (-1.5\alpha_4 V_0 - \beta_2) W_{(3)} + \\ & (3\rho_0' V_0^{*''} + \rho_0 V_0^{*''}) W_{(-2)} + (\rho_0 V_0^{*''} + 3\rho_0' V_0^{*'}) W_{(2)} + (1.5\alpha_4 \rho_0' (V_0^{*2} + \\ & V_0^* V_0^{*''}) - \beta_2 \rho_0' V_0^{*''}) W_{(-4)} + \rho_0' V_0^{*'} (1.5\alpha_4 V_0^* - \beta_2) W_{(4)} + \\ & R_{(0)} (\beta_4 (2V_0' V_0^{*'} + V_0 V_0^{*''} + V_0^* V_0'') + \alpha_5 (V_0'' - V_0^{*''}))] / \alpha_1. \end{aligned}$$

Les équations pour les composantes $W_{(-2)}$, $W_{(2)}$ se séparent aussi:

$$\begin{aligned} W''_{(-2)} = & -0.5\alpha_4 [(3\rho_0 V_0^{*''} + 2\rho_0' V_0^{*'}) W_{(-1)} + (4\rho_0 V_0^{*'} - \rho_0' (V_0^* - \beta_1)) W_{(1)} + \\ & (\rho_0 (-4\alpha_4 V_0' V_0^{*'} - 2\alpha_6) + (1.5\alpha_4 V_0 V_0^{*'} - 0.5\alpha_4 V_0' V_0^* - 0.5\alpha_7 + \\ & \beta_2 (V_0^{*'} - V_0')) \rho_0'] W_{(-3)} + 2\rho_0' W_{(3)} / \alpha_4 + (-2\rho_0' V_0' / 3 - \rho_0 V_0'') W_{(-5)} + \\ & (-4\rho_0 V_0' + \rho_0' (V_0 / 3 + \beta_9)) W_{(5)} + (\rho_0' V_0' (-5\alpha_4 V_0 / 4 - \beta_{10}) + \\ & 2\alpha_4 \rho_0 V_0'^2) W_{(-7)} - V_0^{*'} (\alpha_5 + \beta_4 V_0^*) R_{(0)}] / \rho_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W''_{(2)} = & 0.5\alpha_4 [(3\rho_0 V_0'' + 2\rho_0' V_0') W_{(-2)} + (4\rho_0 V_0' - \rho_0' (V_0 + \beta_1)) W_{(2)} + \\ & (\rho_0 (4\alpha_4 V_0' V_0^{*'} + 2\alpha_6) + (-1.5\alpha_4 V_0^* V_0' + 0.5\alpha_4 V_0^{*'} V_0 + 0.5\alpha_7 - \\ & \beta_2 (V_0^{*'} - V_0')) \rho_0'] W_{(-4)} - 2\rho_0' W_{(4)} / \alpha_4 + (-2\rho_0' V_0^{*'} / 3 - \rho_0 V_0^{*''}) W_{(-6)} + \\ & (-4\rho_0 V_0^{*'} + \rho_0' (V_0^* / 3 - \beta_9)) W_{(6)} + (\rho_0' V_0^{*'} (5\alpha_4 V_0^* / 4 - \beta_{10}) - \\ & 2\alpha_4 \rho_0 V_0^{*2}) W_{(-8)} + V_0' (\alpha_5 - \beta_4 V_0) R_{(0)}] / \rho_0, \end{aligned}$$

Pour les composantes avec les numéros $|n| \geq 3$, les équations ont la forme

$$\begin{aligned} W''_{(n)} = & \alpha_4 [(\alpha_4 n \rho_0 (2V_0' V_0^{*'} + \alpha_9) + \rho_0' \alpha_4 (V_0 V_0^{*'} - V_0' V_0^*) + (iV_0 V_0^{*'} + \\ & iV_0^* V_0' - \beta_{11} - \alpha_{10} V_0^{*'} + \alpha_{10} V_0') i\alpha_4 \rho_0' / n) W_{(n)} - n\rho_0' W'_{(n)} / \alpha_4 + \\ & ((n+1)(\rho_0 V_0'' + \rho_0' V_0') - \rho_0' V_0' / (n-1)) W_{(n-1)} + (2\rho_0 V_0' n - \\ & \rho_0' V_0 / (n-1) - \beta_1 \rho_0' / (n-1)) W'_{(n-1)} + (-\alpha_4 \rho_0 n V_0'^2 - \alpha_4 \rho_0' V_0 V_0' + \\ & \alpha_4 \rho_0' V_0 V_0' / (n-2) + \beta_5 \rho_0' V_0' / (n-2)) W_{(n-2)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((1 - n)(\rho_0' V_0^{*'} + \rho_0 V_0^{*''}) + \rho_0' V_0^{*'} / (n + 1)) W_{(n+1)} + \\
& (2\rho_0 V_0^{*'} (-n) + V_0^* \rho_0' / (1 + n) - \beta_1 \rho_0' / (1 + n)) W_{(n+1)}' + \\
& (\alpha_4 \rho_0 (-n) V_0^{*'}{}^2 + \alpha_4 \rho_0' V_0^* V_0^{*'} (n + 3) / (n + 2) - \\
& \beta_5 \rho_0' V_0^{*'} / (n + 2)) W_{(n+2)}] / (\rho_0 n).
\end{aligned}$$

Pour fermer le problème aux limites, on impose les conditions aux frontières rigides de la couche, pour toutes les composantes de Fourier

$$z = 0, 1 : \quad W_{(n)} = 0.$$

ANNEXE B

Problème aux limites (3.50) - (3.58) en terme de composantes de Fourier

Les équations différentielles ordinaires pour les amplitudes $p_{n,\beta}$ et $w_{n,\beta}$ après l'élimination des amplitudes u_β (avec l'aide de l'équation de la continuité) prennent la forme

$$p'_{n\beta} = \frac{1}{R_\beta} \left[-(in + \Omega_\beta^{-1}k^2)w_{n,\beta} + \Omega_\beta^{-1}w''_{n\beta} - ikA(U_\beta w_{n-1,\beta} + U_\beta^* w_{n+1,\beta}) \right]$$

$$w'''_{n\beta} = -ik\Omega_\beta [ikR_\beta p_{n\beta} + A(U_\beta' w_{n-1,\beta} - U_\beta w'_{n-1,\beta} + U_\beta^{*'} w_{n+1,\beta} - U_\beta^* w'_{n+1,\beta} + \left(ik\Omega_\beta^{-1} - \frac{n}{k} \right) w'_{n\beta}]$$

où $\beta = 1, 2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \hat{N}$,

$$U_\beta(z) = B_{1\beta} \exp(a_\beta(1+i)z) + B_{2\beta} \exp(-a_\beta(1+i)z) + iC, \quad a_\beta = (\Omega_\beta/2)^{1/2}$$

et $B_{1\beta}$, $B_{2\beta}$, C sont des coefficients complexes.

Conditions aux limites à $z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{i}{k} (w'_{n1} - w'_{n2}) + \frac{1}{2}(1+i) (a_1(B_{11} - B_{21}) - a_2(B_{12} - B_{22})) \xi_{n-1} + \\ + \frac{1}{2}(1-i) (a_1(B_{11}^* - B_{21}^*) - a_2(B_{12}^* - B_{22}^*)) \xi_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

$$w_{n1} - w_{n2} = 0,$$

$$\frac{in}{A} \xi_n + \frac{1}{2} ik \left[(B_{1\beta} + B_{2\beta} + ib_\beta) \xi_{n-1} + (B_{1\beta}^* + B_{2\beta}^* - ib_\beta^*) \xi_{n+1} \right] - w_{n\beta} = 0,$$

$$A^{-1} \xi_n \left(\frac{\rho-1}{\rho} Ga - We^{-1}k^2 \right) + [p_n] + 2 \left(\Omega_2^{-1} w'_{n2} - \Omega_1^{-1} \rho^{-1} w'_{n1} \right) = 0,$$

$$-\frac{\Omega_2}{\Omega_1 \rho} \left(ikw_{n1} + ia_1^2 (B_{11} + B_{21}) \xi_{n-1} - ia_1^2 (B_{11}^* + B_{21}^*) \xi_{n+1} + \frac{i}{k} w''_{n1} \right) + \frac{i}{k} w''_{n2} +$$

$$ikw_{n2} + ia_2^2 (B_{12} + B_{22}) \xi_{n-1} - ia_2^2 (B_{12}^* + B_{22}^*) \xi_{n+1} = 0.$$

Conditions sur les murs rigides

$$z = -1 : \quad w_1 = w'_1 = 0; \quad z = 1 : \quad w_2 = w'_2 = 0.$$

REFERENCES

- [1] Benjamin, T.B. Internal waves of finite amplitude and permanent form. *J. Fluid. Mech.*, 1966, vol. 25, pp. 241-270.
- [2] Charru, F., Fabre, J. Long waves at the interface between two viscous fluids. *Phys. Fluids*, 1994, vol. 6(3), pp. 1223-1235.
- [3] Choi, W., Camassa, R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system. *J. Fluid. Mech.*, 1996, vol. 313, pp. 83-103.
- [4] Christodoulides, P., Dias, F. Stability of capillary-gravity interfacial waves between two bounded fluids. *Phys. Fluids*, 1995, vol. 7(12), pp. 3013-3027.
- [5] Christodoulides, P., Dias, F. Resonant capillary-gravity interfacial waves. *J. Fluid. Mech.*, 1994, vol. 265, pp. 303-343.
- [6] Coward, A.V., Papageorgiou, D.P. Stability of oscillatory two-phase Couette flow. *IMA J. Appl. Maths.*, 1994, vol. 53, pp. 75-93.
- [7] Hindmarsh, Alan C. Odepack, a systematized collection of ode solvers. *In Scientific Computing, r. s. Stepleman et al. (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 55-64.*
- [8] Ho, C.M., Huerre, P. Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1984, vol. 16, pp. 365-424.
- [9] Hooper, A.P., Boyd, W.G.C. Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. *J. Fluid. Mech.*, 1983, vol. 128, pp. 507-528.
- [10] Jacqmin, D. Stability of an oscillated fluid with a uniform density gradient. *J. Fluid. Mech.*, 1990, vol. 219, pp. 449-468.
- [11] Khenner, M.V., Lyubimov, D.V., Belozerova, T.S., Roux, B. Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system. *European Journal of Fluid Mechanics (en cours).*

- [12] Khenner, M.V., Lyubimov, D.V., Shotz, M.M. On stability of the liquid - liquid interface under tangential vibrations. *Russian Academy of Science, Mekhanika Zidkosti i Gaza*, vol.3, 1998, pp. 25-31 (en russe) (also reprinted in English in *Fluid Dynamics*).
- [13] Khenner, M.V., Lyubimov, D.V., Roux, B., ShklyaeV, S.V. The Application of Parallel Computations Technique to the Solution of Certain Hydrodynamic Stability Problems. *Lecture Notes Comp. Science*, 1997, vol.1277, pp.40-44.
- [14] Khenner, M.V., Lyubimov, D.V. On stability of vibrations induced flow of the mixture. *Russian Academy of Science, Mekhanika Zidkosti i Gaza (en cours, en russe)*.
- [15] Kumar, K., Tuckerman, L.S. Parametric instability of the interface between two fluids. *J. Fluid. Mech.*, 1994, vol. 279, pp. 49-68.
- [16] Or, A.C. Finite-wavelength instability in a horizontal liquid layer on an oscillating plate. *J. Fluid. Mech.*, 1997, vol. 335, pp. 213-232.
- [17] Parsytec Programmer's Guide, copyright 1992-1995. *PARSYTEC Eastern Europe GmbH, Bernsdorfer Str. 210-212, 09126 Chemnitz, Germany*.
- [18] Petersen, J. Introduction to Programming on Distributed Memory Multiprocessors. In *Numerical Techniques and Parallelism in Physics, Ninth Summer School on Computing Techniques in Physics, Skalsky Dvur, Czechoslovakia, Sept., 1991*.
- [19] Petzold, Linda R. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations. *Siam J. Sci. Stat. Comput.* 4 (1983), pp. 136-148.
- [20] Pouliquen, O., Chomaz J.M., Huerre, P. Propagating Holmboe waves at the interface between two immiscible fluids. *J. Fluid. Mech.*, 1994, vol. 266, pp. 277-302.
- [21] Pozrikidis, C. Numerical studies of singularity formation at free surfaces and fluid interfaces in two-dimensional Stokes flow. *J. Fluid. Mech.*, 1997, vol. 331, pp. 145-167.
- [22] Renardy, Y.Y. Instability at the interface between two shearing fluids in a channel. *Phys. Fluids*, 1985, vol. 28, pp. 3441-3443.
- [23] Renardy, Y.Y. Small-amplitude oscillatory forcing on two-layer plane channel flow. *J. Fluid. Mech.*, 1997, vol. 334, pp. 87-109.
- [24] Wadih, M., Roux, B. Natural convection in a long vertical cylinder under gravity modulation. *J. Fluid. Mech.*, 1988, vol. 193, p. 391.
- [25] Wolf, G.H. The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium. *Z. Physik*, 1961, v. 227, pp. 291-300.

- [26] Yih, C.-S. Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid. Mech.*, 1967, vol. 27, pp. 337-352.
- [27] Yih, C.-S. Instability of unsteady flows or configurations. Part 1. Instability of a horizontal liquid layer on an oscillating plate. *J. Fluid. Mech.*, 1968, vol. 31, pp. 737-751.
- [28] Bezdeneznykh, N.K., Briskman, V.A., Lyubimov, D.V., Cherepanov, A.A., Sharov, M.T. Upravlenie ustojcivost u poverhnosti razdela jidkостей s pomos u vibracij, elektriceskih i magnitnyh polej. V kn.: 3-j Vsesouznyj seminar po gidromehanike i teplomassobmenu v nevesomosti. Tez. doklad Cernogolovka, 1984, str. 18-20 (en russe).
- [29] Belolipeckii, V.M., Chokin, U.I. Matematicheskoe modelirovanie tecenii stratificirovannoj jidkosti. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1991, 173 str. (en russe).
- [30] Belocerkovskii, O.M. Chislennoe modelirovanie v mehanike sploshnyh sred. M.: Nauka, 1984, 519 str. (en russe).
- [31] Birikh, R.V., Rudakov, R.N. Primenenie metoda ortogonalizacii v poshagovom integrirovanii pri issledovanii ustojchivosti konvektivnyh tecenij. Perm: Perm. Un-t, Gidrodinamika, vyp.5, 1974, str. 149-158 (en russe).
- [32] Briskman, V.A. Parametriceskaya stabilizaciya granicy razdela jidkостей. D BFN SSSR, 1976, tom 226, N 5, str. 1041-1044 (en russe).
- [33] Gabov, S.A., Sveshnikov, A.G. Zadaci dinamiki stratificirovannyh jidkостей. M.: Nauka, 1986, 287 str. (en russe).
- [34] Gabov, S.A., Sveshnikov, A.G. Linejnye zadaci teorii nestacionarnyh vnutrennih voln. M.: Nauka, 1990, 341 str. (en russe).
- [35] Gershuni, G.Z., Jukhovickij, E.M. Konvektivnaya ustojcivost nesjimaemoj jidkosti. M.: Nauka, 1972, 392 str. (en russe).
- [36] Godunov, S.K. O chislenom reshenii kraevykh zadach dlya sistem linejnyh obyknovennyh differencialnyh uravnenij. UMN, 1961, tom 16, vyp. 3, str. 171-174 (en russe).
- [37] Zamaraev, A.V., Lyubimov, D.V., Cherepanov, A.A. O ravnovesnyh formah poverhnosti razdela jidkостей v vibracionnom pole. UrO BFN SSSR, Gidrodinamika i processy teplomassoobmena, 1989, str. 23-28 (en russe).
- [38] Khenner, M.V., Lyubimov, D.V. O dlinnovolnivoi neustoichivosti poverkhnosti razdela jidkostí pri kasatel'nykh vibracijakh. Hydrodinamika, Perm, 1998, pp. 191 - 196 (en russe).
- [39] Khenner, M.V., Lyubimov, D.V. Ob ustojchivosti ploskoparallel'nogo vibracionnogo techeniya neodnorodnoi jidkosti. Hydrodinamika, Perm, 1998, pp. 197 - 207 (en russe).

- [40] Korn, G., Korn, T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i injenerov. *M.: Nauka, 1973, 832 str. (en russe).*
- [41] Landau, L.D., Lifshitz, E.M. Teoreticeskaya Fizika. T. 6 Gidrodinamika. *M.: Nauka, 3-e izdanie, 1986. 736 str. (en russe).*
- [42] Levich, V.G. Fiziko-himicheskaya gidrodinamika. *M.: 1952, 539 str. (en russe).*
- [43] Lyubimov, D.V., Savvina, M.V., Cherepanov, A.A. O kvaziravnovesnoj forme svobodnoj poverhnosti jidkosti v modulirovannom pole tajesti. *Zadaci gidromehaniki i teplomassoobmena so svobodnymi granicami. Novosibirsk, SO AN SSSR, 1987, str. 97-105 (en russe).*
- [44] Lyubimov, D.V., Cherepanov, A.A. O vozniknovenii stacionarnogo rel efa na poverhnosti razdela jidkостей v vibracionnom pole. *Mehanika jidkosti i gaza, N 6, 1986, str. 8-13 (en russe).*
- [45] Lyubimov, D.V., Cherepanov, A.A. Vliyanie vyazkosti na strukturu pul sacionnogo polya skorosti jidkosti v vibriruushem sosude. *UrO BFN SSSR, Dinamika vyazkoj jidkosti, 1987, str. 49-58 (en russe).*
- [46] Lyubimov, D.V., Cherepanov, A.A. Dvijenie neodnorodnoj jidkosti v pole vysokocastotnyh postupatel nyh vibracij. *Perm, Konvektivnye teceniya, PGPI, 1989, str. 52-59 (en russe).*
- [47] Lyubimov, D.V., Lyubimova, T.P. Ob odnom metode skvoznogo scheta dlya reseniya zadach s deformiruemoj poverhnost u razdela. *Modelirovanie v mehanike, tom 4 (21), N 1 (en russe).*
- [48] Naife, A.H. Vvedenie v metody vozmushenij. *M.: Mir, 1984, 535 str (en russe).*
- [49] Tablicy dlya vychisleniya funkcij Mat e. Sobstvennye znaceniya, koeficienty i mnojiteli svyazi. *M.: Vyc. Centr BFN SSSR, 1967 (en russe).*
- [50] Forsythe, D.E., Malkolm, M., Moular, K. Mashinnye metody matematiceskih vychislenij. *M.: Mir, 1980, 279 str. (en russe).*
- [51] Cherepanov, A.A. Vliyanie peremennyh vnesnih polej na neustojcivost Releya - Tejlora. V "Nekotorye zadaci ustojcivosti poverhnosti jidkosti". *Preprint, Sverdlovsk, UNC BFN SSSR, 1984 (en russe).*
- [52] Shevcov, G.S. Linejnaya algebra: Uchebnoe posobie. *Perm: Izdatel stvo Permskogo Univer-siteta, 1996, 324 str. (en russe).*